



Esercizio 1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+1)x_1 + (k-1)x_2 + kx_3 \\ (k-1)x_1 + (k+1)x_2 - kx_3 \\ -2kx_1 + 2kx_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) [3 punti] Si determini un vettore $\bar{v}$ non nullo tale che $f_k(\bar{v}) = 2k\bar{v}$ per ogni k in $\mathbb{R}$.
- (B) [3 punti] Sia $W = \bar{v}^\perp$ il piano ortogonale a $\bar{v}$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che $f_k(W) = W$ per ogni k in $\mathbb{R}$.
- (C) [5 punti] Si dimostri che f_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$.
- (D) [4 punti] Si dimostri che se $k \neq 0$ e W' è un piano di $\mathbb{R}^3$ tale che $f_k(W') = W'$, allora $W' = W$.

Esercizio 2. Al variare di r in $\mathbb{R}$ sia $B_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ r^2 & 1 & r+1 \\ 0 & r+1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_r : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f_r(x, y) = {}^t x \cdot B_r \cdot y$.

- (A) [2 punti] Si determinino i valori di r per cui f_r è bilineare e simmetrica.
- (B) [4 punti] Si dimostri che f_r è un prodotto scalare se e solo se $r = 0$.
- (C) [5 punti] Si determini una base ortonormale per f_0 .
- (D) [4 punti] Sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che l'applicazione $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = f_1(x, y) + \langle x | y \rangle$ è un prodotto scalare.

Esercizio 3. Al variare di s in $\mathbb{C}$ sia

$$V_s = \{z \in \mathbb{C}^4 : z_1 + iz_2 + sz_3 + iz_4 = z_2 + (1+s)z_4 = -sz_1 + z_3 + sz_4 = 0\}.$$

- (A) [4 punti] Si determini $\dim_{\mathbb{C}} V_s$ al variare di s in $\mathbb{C}$.
- (B) [4 punti] Si scrivano equazioni parametriche per V_0 e per V_{-i} .
- (C) [3 punti] Sia $V_0^\perp$ l'ortogonale di V_0 rispetto al prodotto scalare hermitiano standard di $\mathbb{C}^4$. Si calcoli $\dim_{\mathbb{C}}(V_0^\perp \cap V_{-i})$ e si determini un vettore $\bar{v} \neq 0$ tale che $\bar{v} \in V_0^\perp \cap V_{-i}$.
- (D) [4 punti] Si dimostri che esiste un'applicazione lineare invertibile $g : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ tale che $g(V_{-i}) \subseteq V_0^\perp$ e $\bar{v} \in g(V_0^\perp)$.