Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 06/12/02

Esercizio 1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ e si indichi ancora con $A_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $A_k(x) = A_k \cdot x$.

(A) [3 punti] Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k sia invertibile.

(B) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per $\mathrm{Ker}(A_{-1})$.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per $\mathrm{Im}(A_{-1})$.

(D) [2 punti] Si determini il rango di A_1.

(E) [4 punti] Sia $V = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ A_1 \cdot x = 2x\}$. Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per V.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ l'applicazione lineare data da

$$f(p(x)) = 2p(0) + (p(1) - p(-1))x + p''(0)x^2$$

e sia $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$.

(A) [3 punti] Si scriva $[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.

(B) [2 punti] Si dimostri che $f(f(p(x))) = 2f(p(x))$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

(D) [3 punti] Si dimostri che $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0$ e che $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$.

(E) [4 punti] Si costruisca una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Continua.)

Esercizio 3. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $P_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ kx_1 - (k+1)x_2 - 2x_3 = 0\}$ e sia inoltre $r = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \ x_2 + x_3 = 1\}$.

(A) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per r.

(B) [3 punti] Si determini l'unico valore $k_0 \in \mathbb{R}$ per cui P_{k_0} sia parallelo a r.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per P_{k_0}.

(D) [4 punti] Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da r. Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per V.

(E) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per $V \cap P_{k_0}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.