Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 7/6/03

Esercizio 1. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia π la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sul piano generato da v_1 e v_2.

(A) [5 punti] Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(B) [5 punti] Si dimostri che l'insieme

$$\{f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ lineare}: \ f \circ \pi = 0, \ f(v_3) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$, e se ne calcoli la dimensione.

(C) [5 punti] Si dimostri che l'insieme

$$\{f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ lineare}: \ \pi \circ f = f, \ \langle f(v_3) | v_3 \rangle = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$, e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ data da

$$f(v) = [g_v]^{(e_1, e_1 - e_2)}_{(e_1 + e_2, e_2)}$$

dove $g_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare tale che

$$g_v(e_1) = e_2 + v, \qquad g_v(e_2) = e_1 - v.$$

(A) [3 punti] Si provi che esiste $F : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lineare tale che $f(v) = f(0) + F(v)$ per ogni v in $\mathbb{R}^2$.

(B) [3 punti] Si dimostri che $\det(F(v)) = 0$ per ogni v in $\mathbb{R}^2$.

(C) [3 punti] Si trovi la matrice di F rispetto alle basi canoniche.

(D) [3 punti] Si dica se l'insieme $\{v \in \mathbb{R}^2 : \ f(v) \text{ ha autovalore } 1\}$ sia un sottospazio vettoriale o affine di $\mathbb{R}^2$.

(E) [3 punti] Si dica se $f(0)$, $f(-2e_2)$ e $f(-2e_1 - 2e_2)$ siano diagonalizzabili.

Esercizio 3. Siano $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ date da

$$f(z) = \begin{pmatrix} z-1 \\ iz \\ i \end{pmatrix}, \qquad g(z) = \begin{pmatrix} z-1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

(A) [3 punti] Si trovino tutti gli z in $\mathbb{C}$ tali che $f(z)$ e $g(z)$ siano ortogonali tra loro.

(B) [3 punti] Si trovino tutti gli z in $\mathbb{C}$ tali che $f(z)$ e $g(z)$ siano linearmente dipendenti.

(C) [3 punti] Si trovino tutte le coppie (z, w) in $\mathbb{C}^2$ tali che $f(z)$ e $g(w)$ siano linearmente dipendenti.

(D) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane del piano generato da $f(1)$ e $g(i)$.

(E) [3 punti] Si trovi un vettore unitario ed ortogonale a $f(0)$ e $g(0)$.