Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 01/09/03

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} -2-k & 4+4k & 2+2k & -2 \\ -1-k & 2+3k & 1+k & -1 \\ -1+k & 2-2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e si indichi ancora con A_k l'applicazione lineare $A_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $A_k(v) = A_k \cdot v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(A) [3 punti] Si determinino due vettori v_1 e v_2 tra loro linearmente indipendenti e tali che per ogni $k \in \mathbb{R}$ si abbia $A_k(v_1) = k \cdot v_1$, $A_k(v_2) = k \cdot v_2$.

(B) [2 punti] Per ogni $k \in \mathbb{R}$ siano $w_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ e $z_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{B}_k = (v_1, v_2, w_k, z_k)$. Si dimostri che $\mathcal{B}_k$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(C) [4 punti] Si determini la matrice $[A_k]^{\mathcal{B}_k}_{\mathcal{B}_k}$.

(D) [2 punti] Si determinino i valori reali di k per cui A_k sia invertibile.

(E) [4 punti] Si determinino i valori reali di k per cui A_k sia diagonalizzabile.

Esercizio 2. Per ogni $s \in \mathbb{R}$ sia $B_s = \begin{pmatrix} 1+s & -1 & -s^2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -s & -2 & 4+s \end{pmatrix}$ e sia $g_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da $g_s(v, w) = {}^t v \cdot B_s \cdot w$ per ogni v, w in $\mathbb{R}^3$.

(A) [4 punti] Si determinino l'unico valore $s_1 \in \mathbb{R}$ per cui g_{s_1} sia un prodotto scalare e l'unico valore $s_0 \in \mathbb{R}$ per cui g_{s_0} sia un'applicazione bilineare simmetrica ma non sia un prodotto scalare.

(B) [3 punti] Sia $V = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \; g_{s_1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right) = 0 \right\}$.
Si determinino equazioni parametriche per V.

(C) [4 punti] Si provi che il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio V definito al punto precedente e che è unitario rispetto a g_{s_1}. Si determini quindi una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga w e che sia ortonormale rispetto a g_{s_1}.

(D) [2 punti] Si dimostri che $g_{s_0}(v, v) \geqslant 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

(E) [2 punti] Sia $W_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \; g_{s_0}(v, v) = 0\}$. Si dimostri che W_0 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e se ne determinino equazioni parametriche.

Esercizio 3. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ siano a_λ, b_λ e c_λ i vettori di $\mathbb{C}^3$ così definiti:

$$a_\lambda = \begin{pmatrix} i \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \; c_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A) [3 punti] Si deteminino i valori complessi di λ per cui $\mathcal{B}_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$ sia una base di $\mathbb{C}^3$.

(B) [4 punti] Si determinino i valori complessi di λ per cui esista un'applicazione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che:

$$f_\lambda(a_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f_\lambda(b_\lambda) = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_\lambda(c_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Si dimostri inoltre che per tali valori l'applicazione f_λ è univocamente determinata dalle condizioni poste.

(C) [3 punti] Si determini l'unico valore $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ per cui f_{λ_0} esista e sia non invertibile.

(D) [5 punti] Si determinino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0})$.