

## Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 01/02/03

Esercizio 1. Al variare di k in  $\mathbb{R}$  sia  $E_k$  l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + kx_4 & = & 0\\ x_1 + kx_3 & = & 1\\ kx_4 & = & -1\\ kx_1 + x_2 + (k^2 - 1)x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

- (A) [3 punti] Si determini l'unico valore reale  $k_0$  per cui  $E_{k_0}$  è vuoto.
- (B) [3 punti] Si determini l'unico valore reale  $k_1$  per cui  $E_{k_1}$  è un insieme infinito e se ne calcoli la dimensione come sottospazio affine.
- (C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per  $E_{k_1}$ .
- (D) [3 punti] Sia W il sottospazio vettoriale associato ad  $E_{k_1}$  e sia  $W^{\perp}$  il sottospazio vettoriale ortogonale a W rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ . Si dimostri che l'insieme  $W^{\perp} \cap E_{k_1}$  consiste di un solo punto P e si calcolino le coordinate di P.
- (E) [3 punti] Si dimostri che P è il punto di  $E_{k_1}$  di minima distanza dall'origine.

Esercizio 2. Al variare di k in  $\mathbb{R}$  sia  $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2k+2 & -1 & -k-1 \\ -2k & -6 & k+2 \end{pmatrix}$  e sia  $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  l'applicazione data da  $f_k(x) = A_k \cdot x$ . Siano inoltre  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e

$$\mathcal{B} = (e_1 + 2e_3, -e_2 + e_3, e_1 + e_2 + 2e_3).$$

- (A) [2 punti] Si dimostri che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- (B) [2 punti] Si scriva  $[f_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ .
- (C) [2 punti] Si scriva  $[f_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .
- (D) [4 punti] Si determinino i valori di k per cui  $f_k$  sia diagonalizzabile.
- (E) [5 punti] Per  $k \neq 2$  si determini una base  $\mathcal{B}_k$  di autovettori per  $f_k$ .

Esercizio 3. Al variare di s in  $\mathbb{R}$  sia  $N_s = \begin{pmatrix} 5 & s \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  e sia  $f_s : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$  l'applicazione data da  $f_s(A, B) = \operatorname{tr}({}^t A \cdot N_s \cdot B)$ .

- (A) [2 punti] Si calcolino  $f_s\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\right) \in f_s\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right).$
- (B) [3 punti] Si dimostri che  $f_s$  è bilineare e simmetrica se e solo se s=3.

Sia ora  $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$  e si consideri l'applicazione  $g: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$  data da  $g(A) = X \cdot A$ . Sia inoltre  $\langle .|. \rangle$  il prodotto scalare standard di  $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ , ossia  $\langle A|B \rangle = \operatorname{tr}({}^t A \cdot B)$ .

- (C) [2 punti] Si dimostri che g è lineare ed invertibile.
- (D) [3 punti] Si dimostri che per ogni  $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$  si ha  $f_3(g(A), g(B)) = \langle A|B \rangle$  e se ne deduca che  $f_3$  è un prodotto scalare.
- (E) [5 punti] Si determini una base ortonormale per  $f_3$ .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.