UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 9/9/02

Esercizio 1. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado $d > 0$ a coefficienti complessi. Si consideri quindi la funzione meromorfa f definita da $f(z) = 1/p(z)$.

(A) [3 punti] Si dimostri che f ha almeno un polo in $\mathbb{C}$.

(B) [3 punti] Si dimostri che esistono $k \leqslant d$ e numeri complessi $a_1, \ldots, a_k$ con questa proprietà: per ogni curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ semplice e chiusa che non incontra i poli di f esistono $n_1, \ldots, n_k \in \{-1, 0, 1\}$ tali che

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i.$$

(C) [3 punti] Si dimostri che l'insieme

$$S_f = \left\{ \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z : \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ semplice, chiusa e disgiunta dai poli di } f \right\}$$

è un sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$.

(D) [3 punti] Si esibisca un polinomio $p(z)$, e quindi una funzione $f(z) = 1/p(z)$, per cui l'insieme

$$S_f = \left\{ \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z : \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ chiusa e disgiunta dai poli di } f \right\}$$

è infinito.

(E) [3 punti] Si dica se l'enunciato (C) valga per qualsiasi f meromorfa su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2. Sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sin t}{1+t^2} - x \\ x(0) = k \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che $x_k(t)$ esiste per ogni $t \geqslant 0$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(B) [4 punti] Si dimostri che $x_k(t)$ esiste su tutto $\mathbb{R}$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) [4 punti] Si dimostri che $\lim\limits_{t \to \infty} x_k(t) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(D) [4 punti] Si dimostri che esiste (non necessariamente finito) $\lim\limits_{t \to -\infty} x_k(t)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ (x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leqslant 1/4, \ z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

(A) [5 punti] Si calcoli l'area della superficie S.

(B) [5 punti] Si consideri il campo di vettori v su $\mathbb{R}^3$ dato da

$$v(x, y, z) = (\sin y - x, \cos z + y, x^2 + y^2).$$

Si scelga una orientazione per S e si calcoli quindi

$$\left| \int_S v \cdot n \right|$$

ove n è il vettore normale a S.

(C) [5 punti] Si calcoli il volume del sottografico di S, ovvero del solido

$$V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 1/4, \ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}.$$