UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Quiz del 28/9/02

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati due vettori in $\mathbb{C}^3$, è sempre possibile aggiungerne un terzo ottenendo una base? [V] / [F]

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ha rango k, è sempre vero che esistono basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tali che $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ha esattamente k coefficienti non nulli? [V] / [F]

3. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, è sempre vero che $\det({}^tA \cdot A)$ è reale non negativo? [V] / [F]

4. Se $A \in \mathcal{M}_{6\times 7}(\mathbb{C})$ ha rango 4, possono tutte le sue sottomatr. 3×3 avere det. nullo? [V] / [F]

5. In $\mathbb{C}^4$ ci sono infiniti vettori unitari ortogonali a $\{z \in \mathbb{C}^4 : \ z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0\}$? [V] / [F]

6. Per quanti valori di k il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + (k^2 - k)\sin(y) + (1 - k^2)yz = k^2 + k$ è un sottospazio vettoriale? [A] Tre. [B] Uno. [C] Nessuno. [D] Due.

7. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, qual è la dimensione minima possibile per un sottospazio Y di $\mathbb{R}^3$ tale che $X \cap Y = \{0\}$? [A] 3. [B] 2. [C] 1. [D] 0.

8. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$. Qual è la minima dimensione possibile per un sottosp. X di $\mathbb{R}^5$ tale che $X + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^5$? [A] 2. [B] 3. [C] 4. [D] 0.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \\ 2y \end{pmatrix}$, siano $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2, e_1 + e_2)$ e $\mathcal{C} = (e_3, e_1 - e_2, e_2)$. Quale delle seguenti è $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$? [A] $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. [B] $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. [C] $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. [D] $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare $\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -5x + 2y + z = k \end{cases}$. Quante sono le sue soluzioni?

[A] Nessuna, per ogni k. [B] Una se $k = 0$, infinite altrimenti.
[C] Infinite se $k = 0$, nessuna altrimenti. [D] Una se $k = 0$, nessuna altrimenti.

11. In $\mathbb{R}^5$ siano $X = e_1 + \mathrm{Span}(e_2, e_3)$ e $Y = e_2 + \mathrm{Span}(e_1, e_4, e_5)$. Quale è vera? [A] Sono disgiunti.
[B] Sono paralleli. [C] Hanno la stessa dimensione. [D] Nessuna delle precedenti.

12. Che dimensione ha il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ di equazioni $z_1 + (1+i)z_2 - 2iz_3 + (1-i)z_4 = 0$, $(1+i)z_1 + 2iz_2 + 2(1-i)z_3 + 2z_4 = 0$, e $(1-i)z_1 + 2z_2 - 2(1+i)z_3 - 2iz_4 = 0$?
[A] 3. [B] 2. [C] 1. [D] 0.

13. Quale delle seguenti coppie di vettori genera un piano ortogonale al vettore $(-1, 3, 2)$?
[A] $(1, 1, -1),\ (1, 4, -4)$. [B] $(1, 3, -4),\ (-1, 1, -2)$.
[C] $(3, 1, 0),\ (1, 1, -2)$. [D] $(1, 1, 1),\ (2, 0, 1)$.

14. Sia $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e siano v_1 e v_2 tali che $Mv_1 = v_1$ e $Mv_2 = 2v_2$. Quale delle seguenti condizioni assicura che M è diagonalizzabile? [A] v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.
[B] Esiste v_3 diverso da v_1 tale che $Mv_3 = v_3$. [C] $\det(M) = 0$. [D] Nessuna delle precedenti.

15. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di $\mathbb{R}^n$, e siano $M_1 = [f]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}$ e $M_2 = [f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}$. Quale delle seguenti può **non** valere? [A] $\det(M_1) = \det(M_2)$. [B] $\mathrm{tr}(M_1) = \mathrm{tr}(M_2)$.
[C] $\det(\mathrm{I}_n - M_1) = \det(\mathrm{I}_n - M_2)$. [D] $M_1^n = M_2^n$.

Il foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Deve essere esibito il libretto o un documento. Non è concesso alzarsi prima del termine né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date sul foglio fornito. Le domande V/F valgono ± 3 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0. Va consegnato questo foglio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Quiz del 28/9/02

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Pro-memoria delle risposte fornite (da non consegnare)

1. V F

2. V F

3. V F

4. V F

5. V F

6. A B C D

7. A B C D

8. A B C D

9. A B C D

10. A B C D

11. A B C D

12. A B C D

13. A B C D

14. A B C D

15. A B C D

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Quiz del 28/9/02

Risposte esatte

. .

1. F

2. V

3. F

4. F

5. V

6. C

7. D

8. A

9. B

10. C

11. D

12. A

13. B

14. C

15. D

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.