UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 25/6/02

Esercizio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_A(x) = A \cdot x$.

(A) [2 punti] Si trovi il rango di A.

(B) [3 punti] Si dimostri che A è diagonalizzabile.

(C) [4 punti] Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per A.

(D) [3 punti] Si scriva la matrice di cambio di base $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(E) [3 punti] Si scriva $[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$.

Esercizio 2. Siano f e g le applicazioni lineari $\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}$ date da $f(p(x)) = p(1)$ e $g(p(x)) = p(-1)$.

(A) [3 punti] Si dimostri che la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ è uguale a quella di $\mathrm{Ker}(g)$.

(B) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(f)$ e per $\mathrm{Ker}(g)$.

Sia ora $F : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare le cui componenti sono f e g.

(C) [3 punti] Si trovi il rango di F.

(D) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(F)$.

(E) [3 punti] Si scriva $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, dove $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ e $\mathcal{E}'$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Sia $\langle . | . \rangle$ il prodotto scalare hermitiano canonico su $\mathbb{C}^4$.

(A) [2 punti] Si ortonormalizzi la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(B) [2 punti] Si trovino vettori v e w di $\mathbb{C}^4$ linearmente dipendenti tali che $\langle v|v \rangle = -\ {}^{t}v \cdot v = 1$ e $\langle w|w \rangle = {}^{t}w \cdot w = 1$.

(C) [2 punti] Si trovino vettori v' e w' di $\mathbb{C}^4$ linearmente indipendenti tali che $\langle v'|v' \rangle = -\ {}^{t}v' \cdot v' = 1$ e $\langle w'|w' \rangle = {}^{t}w' \cdot w' = 1$.

Sia ora V il sottospazio vettoriale $\{f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : f(w') = f(v'),\ f(v') \in \mathrm{Span}(w')\}$ di $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$, dove v' e w' sono come nel punto (C).

(D) [3 punti] Si dimostri che $V \neq \{0\}$ esibendo una funzione $f \in V \setminus \{0\}$ e si dica se tale f è diagonalizzabile.

(E) [3 punti] Si calcoli la dimensione di V su $\mathbb{C}$.

(F) [3 punti] Si dimostri che, comunque si scelgano vettori v e w di $\mathbb{C}^4$ tali che $\langle v|v \rangle = -\ {}^{t}v \cdot v = 1$ e $\langle w|w \rangle = {}^{t}w \cdot w = 1$, questi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.