UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 16/2/02

Esercizio 1. Sia $E_k = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : \ p(0) = k\}$.

(A) [3 punti] Si dimostri che gli E_k sono sottospazi affini tutti paralleli tra loro.

(B) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per E_k.

Sia ora $\langle p(x) | q(x) \rangle = \sum_{i=0}^{3} 4 p_i q_i$, dove $p(x) = \sum_{i=0}^{3} p_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{3} q_i x^i$, e sia $Y = \mathrm{Ker}(D)$, dove $D : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è la derivata $D(\sum_{i=0}^{3} q_i x^i) = \sum_{i=1}^{3} i q_i x^{i-1}$.

(C) [3 punti] Si dimostri che $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(D) [3 punti] Si dimostri che $E_0 \perp Y$.

(E) [3 punti] Si trovi una base $(p^{(1)}(x), p^{(2)}(x), p^{(3)}(x), p^{(4)}(x))$ di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle$, tale che $(p^{(1)}(x), p^{(2)}(x), p^{(3)}(x))$ è una base ortonormale di E_0 e $(p^{(4)}(x))$ è una base ortonormale di Y.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Al variare di x in $\mathbb{R}^3$ sia $f_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f_x(y) = {}^t x \cdot A \cdot y$. Al variare di y in $\mathbb{R}^3$ sia $g_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $g_y(x) = {}^t x \cdot A \cdot y$. Siano infine $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{F}$ la base canonica di $\mathbb{R}$.

(A) [2 punti] Si scriva $[f_x]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ per $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(B) [2 punti] Si scriva $[g_y]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ per $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(C) [2 punti] Si scriva $[f_x]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ per $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ generico.

(D) [2 punti] Si scriva $[g_y]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ per $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ generico.

(E) [4 punti] Si trovino equazioni cartesiane e parametriche per $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ f_x = 0\}$ e per $Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \ g_y = 0\}$.

(F) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane e parametriche per $Z = \{z \in \mathbb{R}^3 : \ f_z = g_z = 0\}$.

(Continua.)

Esercizio 3. Sia $S_k = \begin{pmatrix} 2 & 2+k & 0 \\ 2+k & 3 & 1+ik \\ 0 & 1+ik & 3 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{C}$, e sia $\langle\cdot|\cdot\rangle_k : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ l'applicazione data da $\langle v|w\rangle_k = {}^t\overline{v} \cdot S_k \cdot w$.

(A) [3 punti] Si dimostri che $\langle\cdot|\cdot\rangle_k$ è un prodotto scalare hermitiano solo per $k = 0$.

Si indichi tale prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_0$ con $\langle\!\langle\cdot|\cdot\rangle\!\rangle$

(B) [3 punti] Si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ ortonormale per $\langle\!\langle\cdot|\cdot\rangle\!\rangle$.

Sia ora $\langle\cdot|\cdot\rangle$ il prodotto scalare hermitiano canonico di $\mathbb{C}^3$ e sia $w = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}$.

(C) [2 punti] Si trovi $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tale che $\langle w|v\rangle = \langle\!\langle w|v\rangle\!\rangle_0 = 0$.

(D) [2 punti] Si dimostri che esiste una applicazione $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(v) = w$ e $f(w) = v$.

(E) [2 punti] Si dimostri che l'insieme

$$X = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3) : \ f(\mathrm{Span}(v)) = \mathrm{Span}(w), f(\mathrm{Span}(w)) = \mathrm{Span}(v)\}$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$.

(E) [3 punti] Si trovi la dimensione, sia su $\mathbb{C}$ che su $\mathbb{R}$, dello spazio vettoriale $\mathrm{Span}(X)$.