UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 13/7/02

Esercizio 1. Siano $S_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $f_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f_k(x,y) = {}^t x \cdot S_k \cdot y$.

(A) [3 punti] Si trovi $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che $f_0(v,v) = 0$.

(B) [3 punti] Si dica per quali k la f_k è bilineare simmetrica.

(C) [3 punti] Si dimostri che f_k è un prodotto scalare solo per $k = 1$.

(D) [3 punti] Si trovi una base $\mathcal{B}$ ortonormale per f_1.

(E) [3 punti] Si trovi un'altra base $\mathcal{B}'$, diversa da $\mathcal{B}$, ortonormale per f_1 e si scriva la matrice di cambio di base $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Esercizio 2. Siano $X = \{z \in \mathbb{C}^3 :\ z_1+z_2 = z_1+z_3 = z_2-z_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \right)$.

(A) [3 punti] Si trovino la dimensione di X e quella di Y.

(B) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per X e cartesiane per Y.

(C) [3 punti] Si dimostri che X e Y sono ortogonali tra loro.

(D) [3 punti] Si dimostri che $X + Y = \mathbb{C}^3$.

(E) [3 punti] Si dimostri che lo spazio affine $Z = \{z \in \mathbb{C}^3 \,|\, z_1 + z_3 - 1 = z_2 + 2z_3 = 0\}$ è parallelo a Y.

Esercizio 3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $f(x) = A \cdot x$.

(A) [3 punti] Si trovi il rango di A e si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(f)$.

(B) [3 punti] Si dimostri che A non è diagonalizzabile.

(C) [3 punti] Si trovi il massimo numero di autovettori per A linearmente indipendenti tra loro.

(D) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per $\mathrm{Im}(f)$.

(E) [3 punti] Si dimostri che esiste un'applicazione $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ è surgettiva.