



Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t . Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale delle successioni a coefficienti reali. Si considerino in tali spazi i seguenti sottoinsiemi:

$$X = \left\{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \leq 7, p(-t) = -p(t) \forall t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$Y = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_{n+5} = a_{n+4} + 2a_{n+3} + na_{n+2} - a_{n+1} + a_n \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (A) [3 punti] Si dimostri che X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$ e se ne calcoli la dimensione esibendone una base $\mathcal{X}$.
- (B) [3 punti] Si dimostri che Y è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e se ne calcoli la dimensione esibendone una base $\mathcal{Y}$.
- (C) [5 punti] Sia $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}[t]$ data da

$$f\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right) = (a_0 + 2a_5)t + (a_2 - 2a_4)t^3 + a_1t^5 - (a_3 + a_4)t^7.$$

Si dimostri che f è lineare e che non è né surgettiva né iniettiva.

- (D) [3 punti] Si dimostri che $f(Y) \subset X$ e si indichi con $F : Y \rightarrow X$ l'applicazione data dalla restrizione di f . Si scriva la matrice $[F]_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}$.
- (E) [3 punti] Si determini il rango di F .
- (F) [4 punti] Sia $G : X \rightarrow Y$ l'applicazione lineare la cui matrice $[G]_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ abbia coefficiente 1 nei posti di tipo (i, i) e coefficiente 0 nei posti di tipo (i, j) con $i \neq j$. Si dica se l'applicazione lineare $F \circ G : X \rightarrow X$ sia diagonalizzabile.
- (G) [4 punti] Si dica se l'applicazione lineare $G \circ F : Y \rightarrow Y$ sia diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia P il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ di equazione cartesiana $z_1 - iz_2 + (1 + i)z_4 = 0$.

- (A) [2 punti] Si trovino equazioni parametriche per P .
- (B) [4 punti] Posto su $\mathbb{C}^4$ il prodotto scalare hermitiano standard, si trovino equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio $P^\perp$.
- (C) [4 punti] Posto $v = (-1, 0, 1, -i)$ si trovino la proiezione ortogonale di v su P e la distanza di v da P .
- (D) [4 punti] Sia ora Q il sottospazio affine di $\mathbb{C}^4$ passante per il vettore v del punto (C) e parallelo a quello di equazioni cartesiane $z_1 - z_2 + iz_3 = 0$, $z_2 + (1 - i)z_3 - iz_4 = 0$. Si trovino equazioni cartesiane e parametriche per Q .
- (E) [3 punti] Si trovino le dimensioni di $P + Q$ e di $P \cap Q$.
- (F) [3 punti] Posto $R = v + \text{Span}((i, 1, 0, 0), (0, 0, 0, i))$, si dica se esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ i cui elementi appartengano a $P \cup R$.