UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 08/01/02

Esercizio 1. Al variare di s in $\mathbb{R}$ sia $A_s = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & s^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f_s(x,y) = {}^t x \cdot A_s \cdot y$.

(A) [2 punti] Si dica per quali s la f_s è bilineare simmetrica.

(B) [3 punti] Si dimostri che f_s è un prodotto scalare solo per $s = 2$.

Siano $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$ e $\langle x|y \rangle' = f_2(x,y)$ il prodotto scalare trovato.

(C) [3 punti] Si trovi una base ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle'$.

(D) [2 punti] Si trovi una base (v_1, v_2, v_3, v_4) ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle'$ tale che (v_1, v_2) è ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

(E) [2 punti] Si trovino gli autovalori di A_2.

(F) [3 punti] Si trovi il massimo $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$ tali che esiste una base (v_1, v_2, v_3, v_4) ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle'$ con $(v_1, \ldots, v_k)$ ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e si indichi ancora con $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $A(x) = A \cdot x$.

(A) [2 punti] Si trovi il rango di A.

(B) [3 punti] Si dimostri che A non è diagonalizzabile.

(C) [2 punti] Si trovino equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Ker}(A)$.

(D) [2 punti] Si trovino equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Im}(A)$.

(E) [3 punti] Si verifichi che $\mathrm{Ker}(A) \perp \mathrm{Im}(A)$ rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ e se ne deduca che $\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

(F) [3 punti] Si dimostri che $A^n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(Continua.)

Esercizio 3. Sia $X = \{z \in \mathbb{C}^4 : \ z_1 - iz_2 = z_2 - iz_3 = z_1 + z_3 = 0\}$.

(A) [2 punti] Si trovi la dimensione di X.

(B) [2 punti] Si trovino equazioni parametriche per X.

(C) [2 punti] Si trovi la massima dimensione possibile per un sottospazio Y di $\mathbb{C}^4$ tale che $X \cap Y = \{0\}$.

(D) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per il sottospazio $X^\perp \subset \mathbb{C}^4$.

(E) [3 punti] Si scelga, esibendone equazioni cartesiane, una retta $r \subset X^\perp$.

(F) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $Z \subset \mathbb{C}^4$ tale che $X \subset Z$ e $X^\perp \cap Z = r$.