UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 2/2/02

Esercizio 1. Siano $r = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 = x_3 = 0\}$ e $s = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_2 = 0\}$.

(A) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $r + s$.

(B) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane per $r^\perp$ e per $s^\perp$.

(C) [3 punti] Si verifichi che $r^\perp \cap s^\perp = (r+s)^\perp$.

(D) [3 punti] Si dimostri che esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(r) = s, \qquad f(s) = (r+s)^\perp, \qquad f((r+s)^\perp) = r.$$

(E) [3 punti] Si trovi la dimensione dello spazio vettoriale $\mathrm{Span}(X)$, dove

$$X = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : \ f(r) = s, f(s) = (r+s)^\perp, f((r+s)^\perp) = r\}.$$

Esercizio 2.

(A) [3 punti] Si dimostri che esiste ed è univocamente determinata una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2-i \end{pmatrix}, \ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si esibisca tale A.

(B) [3 punti] Si dimostri che A è diagonalizzabile.

(C) [3 punti] Si trovi una base di autovettori per A.

(D) [2 punti] Si scelga, esibendone equazioni parametriche, un sottospazio $W \subset \mathbb{C}^3$ di dimensione massima tra quelli per cui $W \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

(E) [4 punti] Si dimostri che esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $B \cdot A \cdot w = w$ per ogni $w \in W$.

(Continua.)

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ l'applicazione lineare data da $f(p(x)) = p(1) + p(0)x^2 + p(0)x^3$ e sia $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(A) [3 punti] Si scriva $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

(B) [2 punti] Si calcoli il rango di f.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Im}(f)$ e per $\mathrm{Ker}(f)$.

(D) [2 punti] Si dimostri che $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ e che $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(E) [2 punti] Si trovi una applicazione lineare $g : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ tale che $g(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Ker}(f)$.

(F) [3 punti] Si dimostri che, comunque si scelga g al punto precedente, si ha $f \circ g \circ f = 0$ e $\mathrm{Im}(f \circ g) = f(g(\mathrm{Ker}(f)))$.