



Esercizio 1. Siano $r = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = x_3 = 0\}$ e $s = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.

- (A) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $r + s$.
- (B) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane per r^\perp e per s^\perp .
- (C) [3 punti] Si verifichi che $r^\perp \cap s^\perp = (r + s)^\perp$.
- (D) [3 punti] Si dimostri che esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = (r + s)^\perp, \quad f((r + s)^\perp) = r.$$

- (E) [3 punti] Si trovi la dimensione dello spazio vettoriale $\text{Span}(X)$, dove

$$X = \{f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : f(r) = s, f(s) = (r + s)^\perp, f((r + s)^\perp) = r\}.$$

Esercizio 2.

- (A) [3 punti] Si dimostri che esiste ed è univocamente determinata una matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tale che

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 - i \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si esibisca tale A .

- (B) [3 punti] Si dimostri che A è diagonalizzabile.
- (C) [3 punti] Si trovi una base di autovettori per A .
- (D) [2 punti] Si scelga, esibendone equazioni parametriche, un sottospazio $W \subset \mathbb{C}^3$ di dimensione massima tra quelli per cui $W \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$.
- (E) [4 punti] Si dimostri che esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tale che $B \cdot A \cdot w = w$ per ogni $w \in W$.

(Continua.)

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ l'applicazione lineare data da $f(p(x)) = p(1) + p(0)x^2 + p(0)x^3$ e sia $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

- (A) [3 punti] Si scriva $[f]_{\mathcal{E}}$.
- (B) [2 punti] Si calcoli il rango di f .
- (C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\text{Im}(f)$ e per $\text{Ker}(f)$.
- (D) [2 punti] Si dimostri che $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$ e che $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.
- (E) [2 punti] Si trovi una applicazione lineare $g : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ tale che $g(\text{Im}(f)) = \text{Ker}(f)$.
- (F) [3 punti] Si dimostri che, comunque si scelga g al punto precedente, si ha $f \circ g \circ f = 0$ e $\text{Im}(f \circ g) = f(g(\text{Ker}(f)))$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
