UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 1/6/02

Esercizio 1.

(A) [2 punti] Si dimostri che esiste ed è unica una $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(B) [3 punti] Si trovi il rango di f.

Siano ora $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$ le basi canoniche di $\mathbb{C}^2$ e di $\mathbb{C}^3$ rispettivamente e sia A la matrice $[f]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$.
Sia inoltre $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(C) [1 punto] Si scriva la matrice A.

(D) [3 punti] Si dimostri che $A \cdot M$ è diagonalizzabile.

(E) [3 punti] Si dimostri che $A \cdot N$ non è invertibile per ogni $N \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

(F) [3 punti] Si dimostri che esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $B \cdot A$ è invertibile.

Esercizio 2. Siano $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 = x_2 = x_3\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + x_2 + x_3 = x_4 = 0\}$.

(A) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per X e per Y.

(B) [2 punti] Si dimostri che X e Y sono ortogonali tra loro.

(C) [2 punti] Si scelga una retta r parallela a Y passante per il punto $(1, 1, 1, 1)$, scrivendone equazioni parametriche.

(D) [3 punti] Si verifichi che r è ortogonale a X e si dimostri che la dimensione del sottospazio affine $r + X$ è 3.

(E) [2 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane per $r + X$.

(F) [3 punti] Si dimostri che esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(Y) \neq Y$, $f(r) = r$, $f(X) = X$.

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da

$$f_k(p(x), q(x)) = p_0q_0 + p_0q_1 + p_1q_0 + 2p_1q_1 + kp_2q_2 + (k^2 - k)p_0q_0^2,$$

dove $p(x) = \sum_{i=0}^{2} p_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{2} q_i x^i$. Sia inoltre $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(A) [3 punti] Si dimostri che f_k non è un prodotto scalare per k diverso da 0 e da 1.

(B) [3 punti] Per $k = 0, 1$ si dimostri che f_k è bilineare e se ne scriva la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{E}$.

(C) [3 punti] Si dimostri che f_1 è un prodotto scalare mentre f_0 non lo è.

(D) [3 punti] Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ per f_1.

(E) [3 punti] Si trovi il massimo numero di vettori appartenenti a $\mathcal{B}$ ortogonali tra loro anche rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dato da $\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=0}^{2} p_i q_i$.