UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 08/01/01

Esercizio 1. Si considerino le superfici $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1,\ z = 1-x^2-y^2\}$ e $\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1,\ z = 2(1-x^2-y^2)\}$.

A [3 punti] Si dimostri che $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$, e che fissata una orientazione per Σ_1 ne esiste una ed una sola per Σ_2 tale che Σ_1 e Σ_2 inducano la medesima orientazione su $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$.

B [3 punti] Si calcoli l'integrale su Σ_1 della funzione z.

C [3 punti] Si calcoli l'integrale su Σ_1 della forma $2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

D [3 punti] Si dica per quali k la forma $\mathrm{e}^{kz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + kx^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ha il medesimo integrale su Σ_1 e Σ_2.

E [3 punti] Si calcoli $\int_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int_{\Sigma_2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, spiegando il significato del risultato.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale $(x')^2 + tx' - x = 0$.

A [4 punti] Si dimostri che nessun polinomio di grado maggiore di 2 può risolvere l'equazione.

B [3 punti] Si trovino tutti i polinomi a coefficienti reali che risolvono l'equazione.

C [4 punti] Si dimostri che l'equazione ammette una soluzione locale non sempre nulla tale che $x(1) = 0$, e si dica se tale soluzione sia crescente nell'intorno di 1.

D [4 punti] Si determinino tutte le coppie (t_0, x_0) tali che esiste dell'equazione una soluzione globale x tale che $x(t_0) = x_0$. [Suggerimento: si calcoli $x'(t_0)$, e si cerchino le rette che passano per (t_0, x_0) e risolvono l'equazione.]

Esercizio 3. Siano $\ell = \{t \in \mathbb{R},\ t \le 0\}$ e $\Omega = \mathbb{C} \setminus \ell$.

A [3 punti] Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di f centrato nel punto $i \in \Omega$.

B [3 punti] Si dimostri che esiste $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $\exp(f(z)) = z$ per ogni z in Ω.

C [3 punti] Data f come nel punto precedente, si calcoli $\lim_{t\to 0^+}(f(-1+it) - f(-1-it))$.

D [3 punti] Se $f(z) = \frac{g(z)}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$ con $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, si ponga $\phi(r) = \int_{\partial\Delta_r} f(z)\,\mathrm{d}z$. Si dica per quali r la $\phi(r)$ sia definita. Si dica inoltre quanti valori diversi la ϕ può assumere.

E [3 punti] Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di classe C^1 tale che $f|_\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f|_\ell \equiv 0$. Si dimostri che $f \equiv 0$. Vale la stessa conclusione supponendo solo f continua?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.