UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Geom. e Alg. 99/00" + "Matematica II 00/01" – Scritto del 28/05/01

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k(v) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$.

(A) [4 punti] Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ la f_k sia diagonalizzabile.

(B) [4 punti] Si dimostri che uno ed uno solo dei tre piani coordinati P ha la proprietà che $f_k(P) = P$ per ogni $k \neq 0$.

(C) [4 punti] Si dimostri che per ogni $k \neq 0$ esiste un autovettore v_k per f_k non contenuto in P.

(D) [3 punti] Si trovi un vettore $w \in P$ ortogonale a tutti i vettori v_k.

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x, y, z, w) si considerino i piani P e Q definiti rispettivamente dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$P : \begin{cases} w + x = y + z \\ w + y = x + z \end{cases} \qquad q : \begin{cases} x + y = w + z \\ w - y = 0. \end{cases}$$

(A) [4 punti] Si trovino le dimensioni di $P \cap Q$ e di $P + Q$.

(B) [3 punti] Si scrivano equazioni parametriche per $P \cap Q$ e cartesiane per $P + Q$.

(C) [4 punti] Sia R lo spazio ortogonale a $P + Q$. Si trovi una base ortonormale (v_1, v_2, v_3, v_4) di $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$v_1 \in P \cap Q, \quad v_2 \in P, \quad v_3 \in Q, \quad v_4 \in R.$$

(D) [2 punti] Si dimostri che esiste una matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ ortogonale ed avente determinante $+1$ tale che $A(P) = Q$, $A(Q) = P$ e $A(R) = R$, dove si sta indicando ancora con A l'applicazione lineare associata ad A.

(E) [2 punti] Si dimostri che esiste una matrice A come nel punto precedente e tale che inoltre $A^2 = \mathrm{I}_4$.

Esercizio 3. Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dato da

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } A^k = \mathrm{I}_2\}.$$

(A) [4 punti] Si dimostri che se $A \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore per A, allora $|\lambda| = 1$.

(B) [3 punti] Si dimostri che $\mathcal{S}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

(C) [3 punti] Si dimostri che se A è un elemento di $\mathcal{S}$, allora anche A^{-1} e ${}^{t}A$ sono elementi di $\mathcal{S}$.

(D) [5 punti] Si dia un esempio di matrice $A \in \mathcal{S}$ con coefficienti reali ma non diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.