"Geom. e Alg. 99/00" + "Matematica II 00/01" – Scritto del 27/01/01

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}_{\leq d}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più d nella indeterminata x. Si considerino la funzione $D : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ che associa ad un polinomio $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ la sua derivata $D(p(x)) = 3ax^2+2bx+c$, e la funzione $g : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ che associa ad un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ il polinomio $x \cdot p(x)$.

(A) [3 punti] Si mostri che D è lineare e si trovino $\mathrm{Ker}(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$.

(B) [2 punti] Si mostri che g è lineare e si trovino $\mathrm{Ker}(g)$ e $\mathrm{Im}(g)$.

(C) [3 punti] Si mostri che $D \circ g : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è lineare e bigettiva.

(D) [3 punti] Si trovi la matrice di $D \circ g$ rispetto alla base $(2, x, x^2 + x)$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(E) [2 punti] Si mostri che $g \circ D : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ non è bigettiva.

(F) [2 punti] Si trovino gli autovalori di $D \circ g$ e quelli di $g \circ D$, e si mostri che entrambe le applicazioni sono diagonalizzabili.

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1+k \\ k & 0 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 2-2k & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $f_k(x) = A_k \cdot x$.

(A) [5 punti] Si mostri che f_k è iniettiva per ogni $k \in \mathbb{R}$ tranne che per due valori k_0, k_1. Si trovino k_0 e k_1.

(B) [3 punti] Siano $V_0 = \mathrm{Im}(f_{k_0})$ e $V_1 = \mathrm{Im}(f_{k_1})$. Si trovino le dimensioni di V_0 e di V_1.

(C) [4 punti] Si trovi la dimensione di $V_0 \cap V_1$, si mostri che $V_0 + V_1 = \mathbb{R}^4$ e si trovi una base (v_1, v_2, v_3, v_4) per $\mathbb{R}^4$ con $v_1 \in V_0 \cap V_1$ e $\{v_2, v_3, v_4\} \subset V_0 \cup V_1$.

(D) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane per $V_0 \cap V_1$.

(Continua.)

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2k \cdot x_3 \\ x_2 - x_1 \\ k \cdot x_3 \end{pmatrix}$. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$.

(A) [1 punto] Si scriva $[f_k]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.

(B) [1 punto] Si verifichi che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(C) [2 punti] Si scriva $[f_k]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$.

(D) [3 punti] Si scriva $[f_k]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(E) [3 punti] Si trovino gli autovalori di f_k

(F) [3 punti] Si dica per quali k la f_k sia diagonalizzabile.

(G) [2 punti] Per $k = 1$ si trovi una base che diagonalizza f_k.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
Gli studenti del corso di Geometria e Algebra annuale (a.a. 1998/99) devono sostenere obbligatoriamente l'esame orale.
