UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Geom. e Alg. 99/00" + "Matematica II 00/01" – Scritto del 24/09/01

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le due rette definite come segue tramite equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} 2x + 3y + z - 3 = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x + y + z = 0, \\ y = 3. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si determini $r \cap r'$.

(B) [4 punti] Si trovi una equazione cartesiana del piano $P \subset \mathbb{R}^3$ che contiene r e r'.

(C) [4 punti] Si esibisca oppure di dimostri che non esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che ciascuno dei vettori v_1, v_2, v_3 giaccia in P.

(D) [4 punti] Sia ℓ una retta giacente su P ed ortogonale a r. Sia Q il piano che contiene r ed è ortogonale a ℓ. Si provi che Q non dipende dalla scelta di ℓ e se ne trovino equazioni parametriche.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ l'applicazione data da $f(ax^3+bx^2+cx+d) = cx^3+dx^2+ax+b$.

(A) [4 punti] Sia $V \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ il sottospazio dato da tutti i polinomi $p(x)$ tali che $p(i) = p(-i) = 0$, dove i è l'unità immaginaria. Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(B) [4 punti] Si dimostri che $f(p(x)) = p(x)$ se e solo se $p(x) \in V$.

(C) [3 punti] Si trovi un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ tale che $g \circ g = f$.

(D) [4 punti] Si dimostri che esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ tale che $h \circ h$ è l'identità, $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id})$ ha dimensione 2, e $h(V) = V$ ma $h(p(x)) \neq p(x)$ per ogni $p(x) \in V$ non nullo.

Esercizio 3. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-k \\ 0 & 4-k & 0 \\ 1-k & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k(v) = A_k \cdot v$.

(A) [4 punti] Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_k sia iniettiva e per quali $k \in \mathbb{R}$ sia suriettiva.

(B) [3 punti] Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_k ammette un autovettore.

(C) [4 punti] Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_k sia diagonalizzabile.

(D) [4 punti] Si dimostri che esiste un $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ per cui l'applicazione $g_k : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ data da $g_k(v) = A_k \cdot v$ non è diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
Gli studenti del corso di Geometria e Algebra annuale (a.a. 1998/99) devono sostenere obbligatoriamente l'esame orale.