



Esercizio 1. Al variare di k in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & k & 1/k \\ -i & k & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione $f_k : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f_k(z, w) = {}^t \bar{z} \cdot A_k \cdot w$.

(A) [3 punti] Si dica per quali k la f_k sia una forma hermitiana.

(B) [4 punti] Si dimostri che la f_k è hermitiana e definita positiva esattamente per $k = 1$.

Si ponga ora $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = f_1$, sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il consueto prodotto scalare hermitiano su $\mathbb{C}^3$, e sia $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siano poi:

$$\begin{aligned} P &= \{z \in \mathbb{C}^3 : \langle\langle v, v_0 \rangle\rangle = 0\}, \\ \ell &= \{z \in \mathbb{C}^3 : \langle\langle v, v_0 \rangle\rangle = \langle v, v_0 \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

(C) [4 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane di P .

(D) [4 punti] Si trovino equazioni parametriche e cartesiane di ℓ .

Esercizio 2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k+2 & 0 \\ 0 & 3-k-k^2 & k-1 \\ 0 & 2-k-k^2 & k \end{pmatrix}.$$

(A) [4 punti] Si calcolino gli autovalori di A_k .

(B) [6 punti] Si calcolino le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori, deducendo che A_k non è diagonalizzabile esattamente per due valori di k .

Indicati con k' e k'' i due valori di k per i quali A_k non è diagonalizzabile, si ponga ora $B' = k' \cdot I_3 - A_{k'}$ e $B'' = k'' \cdot I_3 - A_{k''}$.

(C) [3 punti] Si dica se esista su $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare rispetto al quale $\text{Ker}(B')$ e $\text{Ker}(B'')$ siano ortogonali tra loro.

(D) [2 punti] Si dica se esista su $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare rispetto al quale $\text{Im}(B')$ e $\text{Im}(B'')$ siano ortogonali tra loro.

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}_{\leq 4}[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita come segue:

$$F(p(t)) = \left(p(1), p(0) - p(-1) - p(2), p(-2) - p(0) \right).$$

- (A) [3 punti] Si dimostri che F è lineare, si calcolino $\text{rank}(F)$ e $\dim(\text{Ker}(F))$ e si esibisca la matrice di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_{\leq 4}[t]$ e $\mathbb{R}^3$.

Siano ora

$$X = \left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[t] : p(t) = p(-t) \ \forall t \right\}, \quad Y = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}.$$

- (B) [2 punti] Si calcolino le dimensioni di X ed Y e se ne fissino delle basi.
- (C) [3 punti] Si provi che $F(X) \subset Y$ e se ne deduca che la restrizione di F definisce una applicazione lineare $f : X \rightarrow Y$.
- (D) [2 punti] Si calcolino $\text{rank}(f)$ e $\dim(\text{Ker}(f))$ e si esibisca la matrice di f rispetto alle basi fissate nel punto (B).

Sia ora $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 4}[t]$ l'applicazione definita come segue:

$$H(v_1, v_2, v_3) = v_1 \cdot (t^2 + t^3) + v_2 \cdot (t^2 + t^3 + t^4) + v_3 \cdot (t^3 + t^4).$$

- (E) [3 punti] Si provi che H è lineare e che $H(Y) \subset X$. Se ne deduca che la restrizione di H definisce una applicazione lineare $h : Y \rightarrow X$ e si esibisca la matrice di h rispetto alle basi fissate nel punto (B).
- (F) [2 punti] Si dimostri che $h \circ f$ e $f \circ h$ sono diagonalizzabili.