"Geom. e Alg. 99/00" + "Matematica II 00/01" – Scritto del 10/02/01

Esercizio 1. In $\mathbb{C}^3$ sia P il piano di equazione cartesiana $z_1 + iz_2 - z_3 = 0$.

(A) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche di P.

(B) [2 punti] Si descriva un altro piano P' tale che $P + P' = \mathbb{C}^3$ e si calcoli la dimensione su $\mathbb{C}$ si $P \cap P'$.

(C) [3 punti] Si trovi una base ortonormale di P.

(D) [2 punti] Si trovi un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario e ortogonale a P.

(E) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche di una retta passante per $(i, 0, 1)$ e parallela a P.

(F) [2 punti] Si trovino equazioni cartesiane della retta di cui al punto (E).

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 3k+1 & -k-1 & k+1 \\ 3k-1 & -k+1 & -k-1 \\ 0 & 0 & 2k^2 \end{pmatrix}$.

(A) [3 punti] Si dimostri che per $k = 1$ la A_k è invertibile.

(B) [3 punti] Per $k = 1$ si ortonormalizzi la base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta trasformando tramite A_k la base canonica.

(C) [3 punti] Si calcolino gli autovalori di A_k.

(D) [3 punti] Si dica per quali k la A_k sia diagonalizzabile.

(E) [3 punti] Per $k = 2$ si trovi una base che diagonalizza A_k.

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k(x, y, z) = (-k^2 \cdot x + (k+1) \cdot z, y, -2k^3 \cdot x + (2k^2 + k) \cdot z)$.

(A) [2 punti] Si scriva la matrice che rappresenta f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(B) [5 punti] Per $k = 0$ sia $V = \mathrm{Im}(f_0)$. Si descrivano equazioni parametriche e cartesiane di V e di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $V + W = \mathbb{R}^3$ e $V \cap W = \{0\}$.

(C) [4 punti] Si trovi una base $\mathcal{B}_k$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice $[f_k]_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_k}$ che rappresenta f_k rispetto a tale base sia la matrice $\begin{pmatrix} k & k+1 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) [4 punti] Si discuta la variare di $k \in \mathbb{R}$ quando la f_k sia diagonalizzabile.