UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Geom. e Alg. 99/00" + "Matematica II 00/01" – Scritto del 09/07/01

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z) si considerino il piano W di equazione $x + 2y = 0$ e la retta r di equazioni $x + z = 0$ e $y = 0$.

(A) [3 punti] Si dimostri che esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare bigettiva tale che
$$f(W) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad \text{e} \quad f(r) = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}.$$

(B) [3 punti] Si dimostri che esiste su $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare rispetto al quale r è ortogonale a W.

(C) [3 punti] Si dimostri che, fissato su $\mathbb{R}^3$ un qualsiasi prodotto scalare cui sia associata una norma $\| . \|$, esiste $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $\mathrm{Im}(g) = W$ e $\|g(v)\| \leq \|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

(D) [3 punti] Si dimostri che l'insieme X delle matrici $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tali che $A(W) \subset W$ e $A(r) \subset r$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. (Si sta indicando con A sia la matrice sia l'applicazione lineare associata.)

(E) [3 punti] Si calcoli la dimensione di X.

Esercizio 2.

(A) [5 punti] Sia $i : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ l'applicazione inclusione, cioè quella data da $i(p(x)) = p(x)$. Si dimostri che esiste $f : \mathbb{R}_{\leq 5}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lineare e surgettiva con $(f \circ i)(p(x)) = 0$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(B) [5 punti] Siano $n \geq m > 0$ due interi e sia $i : \mathbb{R}_{\leq m}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ la funzione inclusione. Si dimostri che esiste $f : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq m}[x]$ lineare e surgettiva con $f \circ i = 0$ se e solo se $n \geq 2m + 1$.

(C) [5 punti] Si esibisca oppure si dimostri che non esiste una funzione lineare iniettiva $j : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ tale che gli elementi $1, x, x^2, x^3$ non sono contenuti nell'immagine di j.

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_k(v) = A_k \cdot v$ con
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-k & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) [4 punti] Si dimostri che f_k è diagonalizzabile per ogni $k \neq 1$.

(B) [4 punti] Sia $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : f_k(v) = f_{k'}(v)\ \forall k, k' \in \mathbb{R}\}$. Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(C) [4 punti] Si esibisca una base per W.

(D) [3 punti] Sia W' lo spazio ortogonale a W rispetto al prodotto scalare canonico. Si dimostri che $f_k(W') \subset W'$ e che $f_k(W) \not\subset W$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
Gli studenti del corso di Geometria e Algebra annuale (a.a. 1998/99) devono sostenere obbligatoriamente l'esame orale.