



Esercizio 1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

- (A) [4 punti] Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k sia diagonalizzabile.
- (B) [3 punti] Si trovi un vettore v_1 di $\mathbb{R}^3$ che sia autovettore per tutte le A_k (cioè per ogni $k \in \mathbb{R}$).
- (C) [4 punti] Si trovi un altro vettore v_2 di $\mathbb{R}^3$, linearmente indipendente da v_1 , che sia autovettore per tutte le A_k .
- (D) [4 punti] Si trovi un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia autovettore di A_k soltanto per un valore di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i piani

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\} \quad \text{e} \quad P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

- (A) [4 punti] Si trovino equazioni parametriche per P_1 , per P_2 e per $P_1 \cap P_2$.
- (B) [3 punti] Siano $r_1 = P_1^\perp$ e $r_2 = P_2^\perp$ le rette ortogonali a P_1 e P_2 rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. Si trovino equazioni parametriche per r_1 e per r_2 .
- (C) [2 punti] Si dimostri che $(r_1 + r_2)^\perp = P_1 \cap P_2$.
- (D) [2 punti] Siano $v_1 \in r_1$, $v_2 \in r_2$ e $v_3 \in P_1 \cap P_2$ vettori tali che $\|v_i\| = 1$ per ogni i . Si mostri che (v_1, v_2, v_3) è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- (E) [2 punti] Si dimostri che esiste un'applicazione lineare bigettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(P_1) = P_2$, $f(P_2) = P_1$ e $f(r_1 + r_2) = r_1 + r_2$.
- (F) [2 punti] Si dimostri che se $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è lineare e tale che $g(P_1) = P_2$ e $g(P_2) = P_1$, allora ogni generatore w di $P_1 \cap P_2$ è autovettore per g .

(Continua.)

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $S_k = \begin{pmatrix} k & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & k+2 \end{pmatrix}$. Per $x, y \in \mathbb{R}^3$ si ponga $f_k(x, y) = {}^t x \cdot S_k \cdot y$.

- (A) [2 punti] Al variare di k si dica quale sia il rango di S_k .
- (B) [2 punti] Si dica per quali k la f_k sia bilineare e simmetrica.
- (C) [4 punti] Si dica per quali k la f_k sia un prodotto scalare (cioè sia bilineare, simmetrica e definita positiva), dimostrando in particolare che ciò accade per $k = 2$.

Si indichino d'ora in poi con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ e con $\langle \cdot | \cdot \rangle'$ il prodotto scalare f_2 (cioè quello descritto in precedenza con $k = 2$).

- (D) [2 punti] Si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle'$
- (E) [3 punti] Si trovi un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle'$.
- (F) [2 punti] Si dica se un vettore come nel punto precedente possa essere scelto anche unitario sia rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle'$.