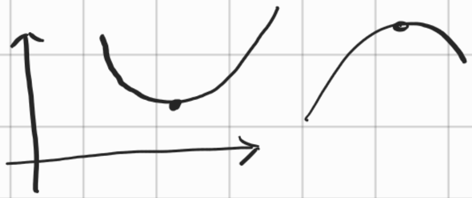
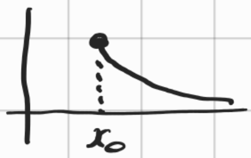
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 39 - 16.1.2023



Teorema (Fermat)

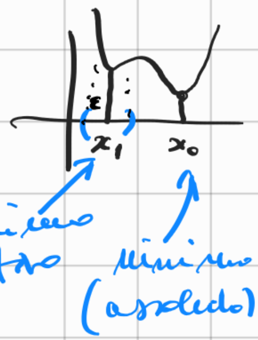
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se $x_0\in(a,b)$ è punto di massimo o minimo e se f è derivabile in x_0 allora $\underbrace{f'(x_0)=0}_{\text{punto critico (o stazionario)}}$.



dim Supponiamo x_0 sia un minimo:

$$f(x_0)=\min f((a,b))$$

$$f(x_0)\le f(x) \quad \forall x\in(a,b)$$



def

[x_1 è un punto di minimo relativo (o locale) se $\exists\, \varepsilon>0$ t.c. x_1 è minimo (assoluto) per f ristretta ad $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)$]

[Se f non fosse derivabile: ]

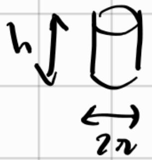
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ è } \begin{cases} \ge 0 & \text{se } x>x_0 \\ \le 0 & \text{se } x<x_0\end{cases}$$

$$0\le \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{=0} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

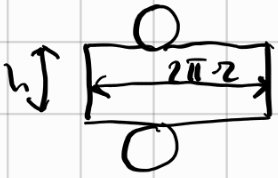
□

principio di Fermat

Esempio [lattina]. (ottimizzazione)

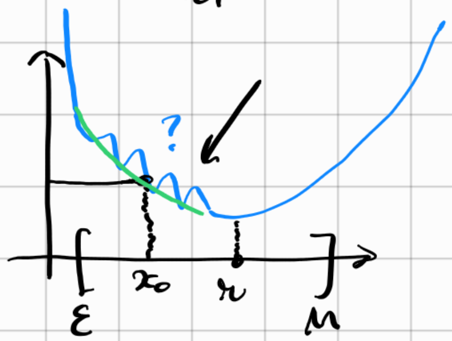


Trovare il cilindro di volume 330 cc = 33 cl che ha superficie totale minima.



$$V = \pi r^2 \cdot h = 330 \,(\text{cm})^3$$
$$S_{TOT} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}, \quad f(r) = S_{TOT} = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi r}\frac{V}{\cancel{\pi r^2}} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$



$f: I \to \mathbb{R}$, $I = (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \lim_{r\to 0^+} f(r) = \lim_{r\to+\infty} f(r) = +\infty \\ f \text{ continua} \end{cases}$$

Per Weierstrass generalizzato f ha minimo su I.

[Scelto $x_0 \in I$ (es. $x_0 = 1$) $y_0 = f(x_0)$ per definizione di limite esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > y_0$ $\forall x \in (0, \varepsilon)$
esiste $M > 0$ $f(x) > y_0$ $\forall x \in (M, +\infty)$.
Su $[\varepsilon, M]$ per Weierstrass f ha minimo in $x_1 \in [\varepsilon, M]$
ma $x_0 \in [\varepsilon, M]$, $f(x_1) \le f(x_0) = y_0 \le f(x)$ $\forall x \in I$.]

- c'è almeno un minimo.
- per Fermat in ogni minimo f' si annulla (se f è derivabile)

Trovo i punti critici:

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

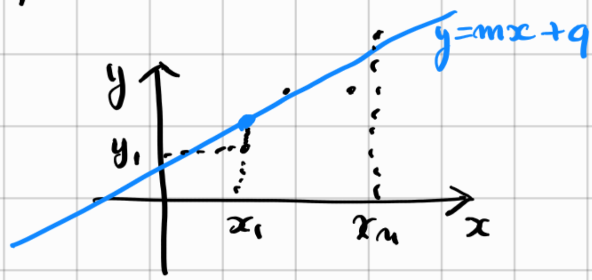
$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \doteq 0 \qquad 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \qquad r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 3.74 \text{ cm}$$

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ è l'unico punto critico
$\Rightarrow$ (Fermat) è l'unico minimo. $\square$

Esercizio (A)

Dati $x_1, \dots, x_n$
$y_1, \dots, y_n$

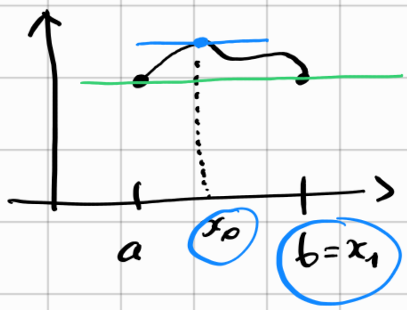


Trovare m e q che rendano minimo lo scarto quadratico.

$$\mathcal{E}(m,q) = \sum_{k=1}^{n} (m x_k + q - y_k)^2 .$$

Teo (Rolle)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$,
f continua su $[a,b]$
f derivabile su (a,b).
Allora $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$.



dim

Per Weierstrass esistono x_0 e x_1 punti di massimo e (rispettivamente) di minimo per f su $[a,b]$
Se uno tra x_0 e x_1 sta in (a,b) applico Fermat e trovo che f' si annulla in quel punto.
Se entrambi $x_0, x_1 \notin (a,b)$ $\quad x_0, x_1 \in \{a,b\}$

$$\underset{\max f}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}} = \underset{\min f}{\underset{\shortparallel}{f(x_1)}} = f(a) = f(b).$$

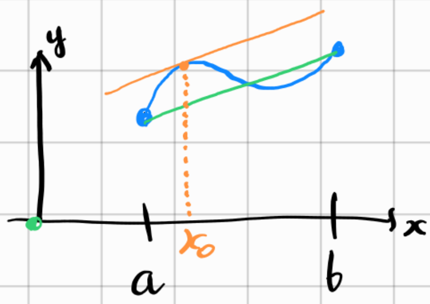
$\max f = \min f \Rightarrow f(x) = f(a) = f(b) \quad \forall x \in [a,b]$.
f costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$. $\square$

Teorema (Lagrange, valor medio) $(a<b)$

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b)

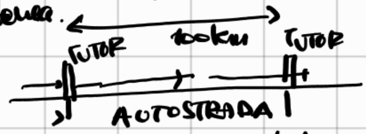
Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$\boxed{f'(x_0)} = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



↑ velocità istantanea

↑ velocità media



$t=a$ chilometro $f(a)$

$t=b$ chilometro $f(b)$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lagrange $\Downarrow$ MULTA!

dim

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\cdot x$$

$$g(b)-g(a) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, b - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, a$$

$$= \left[f(b)-f(a)\right]\cdot\left[1 - \frac{b}{b-a} + \frac{a}{b-a}\right]$$

$$= \left[f(b)-f(a)\right]\cdot\left[\frac{\cancel{b-a}-\cancel{b+a}}{\cancel{b-a}}\right] = 0.$$

$g(b)=g(a)$

g è continua su $[a,b]$

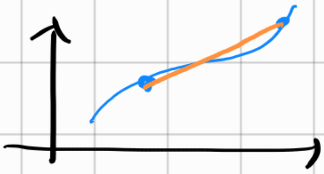
g è derivabile su (a,b) come f.

Rolle $\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b)$: $g'(x_0)=0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

CRITERI di MONOTONIA



Def $f: A \to \mathbb{R}$ si dice:

crescente se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

oppure $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

ovvero: $\forall x_1 \neq x_2$ $\quad \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$

strett. cresc. se $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

decrescente se $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$

strett. decrescente se $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

costante se $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$(\exists c : f(x) = c)$.

Criteri di monotonia (due versi)

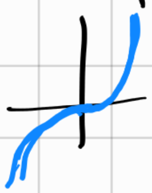
Verso facile: Se f crescente (decrescente) e derivabile in x_0

Allora $f'(x_0) \geq 0$. (≤ 0) [definizione di derivata, permanenza del segno]

Se f strett. crescente (decrescente) non posso dire niente di più $f'(x_0) \geq 0$ ($\leq$)

Es $f(x) = x^3$ è strett. crescente.

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$.



Verso interessante: se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo,
f continua su I, derivabile in $J = (\inf I, \sup I)$

(1) Se $f'(x) \geq 0$ $(\leq)$ $\forall x \in J$ Allora f è crescente (decrescente) (su tutto I)

Se $f'(x) > 0$ $(<)$ $\forall x \in J$ Allora f è strett. crescente (decrescente)

Se $f'(x) = 0$ $\forall x \in J$ Allora f è costante

dim Sia $f'(x) \geq 0$ $(\leq)$ $(> <)$ $\forall x \in J$. Scelti $a, b \in I$, $a < b$.
Posso applicare Lagrange su $[a,b] \subseteq I$, $(a,b) \subseteq J$.

I è un intervallo

$$\exists x_0 \in (a,b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \geq 0 \; (\leq 0) \; (> <)$$

$\square$