LEZIONE N. 75
ANALISI MATEMATICA (B)
3.4.2020

Eq. diff. lineari a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b(x)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ costanti $\in \mathbb{R}$.

$L[u] = b$ Ker L ha dimensione n

Bootstrap Se u è soluzione $u \in C^\infty$, se $b \in C^\infty$

$$(*) \quad u^{(n)} = b(x) - a_{n-1} u^{(n-1)} - \dots - a_1 u' - a_0 u$$

se u è sol. u è derivabile almeno n volte
il lato destro di $(*)$ è una funzione derivabile
quindi $u^{(n)}$ è derivabile
quindi la derivata del lato destro di $(*)$
è derivabile
allora $u^{(n+1)}$ è derivabile
.... all'infinito
$u \in C^\infty$.

L'eq. omogenea $L[u] = 0$ ha soluzioni che sono combinazione lineare di n soluzioni indipendenti se $u(x) = e^{\lambda x}$ $\quad u'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ ← (è vero anche se $\lambda \in \mathbb{C}$.)

↑ è un autovettore dell'operatore D di autovalore λ.

Pensiamo ad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto u(x)$

$$u(x) = f(x) + i g(x) \qquad f \in \operatorname{Re} u,\ g \in \operatorname{Im} u.$$

$$u'(x) = f'(x) + i g'(x)$$

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$ anche quando $u(x) \in \mathbb{C}$.

Abbiamo già visto che

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\lambda(x+h)} - e^{\lambda x}}{h} = \lim_{h \to 0} \lambda \cdot e^{\lambda x} \frac{(e^{\lambda h} - 1)}{\lambda h}$$

$\to 1$ anche quando $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$u(x) = p(x) \cdot e^{\lambda x}, \quad p \text{ polinomio.}$$

$$D u(x) = \left[p'(x) + \lambda p(x) \right] e^{\lambda x}$$

$$(D - \mu I) u(x) = u'(x) - \mu u(x)$$
$$= \left[p'(x) + (\lambda - \mu) p(x) \right] e^{\lambda x}$$

↑ è un polinomio: se $\lambda \neq \mu$ dello stesso grado di p. Se $\lambda = \mu$, $[\ldots] = p'$, ha grado inferiore (di 1) al grado di p.

$$(D - \lambda I)\left[p(x) e^{\lambda x}\right] = p'(x) e^{\lambda x}$$

$$0 \xleftarrow{D-\lambda} e^{\lambda x} \leftarrow x e^{\lambda x} \leftarrow \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda x} \leftarrow \frac{1}{6} x^3 e^{\lambda x} \leftarrow \ldots \leftarrow \ldots$$

è un autovettore di D rispetto all'autovalore λ (autofunzione)

autovettori (autofunzioni) generalizzati

$e^{\lambda x}$ $\quad xe^{\lambda x} \ldots \quad x^N e^{\lambda x}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 & \\ & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & 0 & \lambda & 1 & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

← Blocco di Jordan

$(D-\lambda)u = v$

$Du = \lambda u + v$

$$L[u] = u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

polinomio associato alla equazione a coefficienti costanti

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{m_k}.$$

$\lambda_1 \ldots \lambda_k \in \mathbb{C}.$

A, B un operatore $V \to V$

$A^K = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{K}$

$c \cdot A \qquad A+B$

$$L[u] = P(D)[u]$$

$I = \mathbb{1}$

$\lambda I = \lambda$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I)u.$$

$$= D^n u + a_{n-1} D^{n-1} u + \ldots + a_1 Du + a_0 u.$$

$$L[u] = (D-\lambda_1)^{m_1} \cdot (D-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (D-\lambda_k)^{m_k}[u]$$

Se $(D-\lambda_j)^{m_j}[u] = 0 \Rightarrow u$ è soluzione.

$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$

(tutte tra loro indipendenti)

Basta trovare m_j soluzioni indipendenti di

$$(D-\lambda_j)^{m_j} u = 0.$$

Queste soluzioni sono:

$$m_j \begin{cases} e^{\lambda_j x} & (D-\lambda_j)\, e^{\lambda_j x} = 0 \\ x e^{\lambda_j x} & (D-\lambda_j)^2\, x e^{\lambda_j x} = (D-\lambda_j)\, e^{\lambda x} = 0 \\ x^2 e^{\lambda_j x} & \dots \\ \vdots & \\ x^{m_j - 1} e^{\lambda_j x}. & \end{cases}$$

Es $\quad P(\lambda) = (\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$$L[u] = P(D)[u] = u''' - 3u'' + 3u' - u$$

$$u_1(x) = e^x \qquad (D-1)u_1 = e^x - e^x = 0$$

$$u_2(x) = x e^x \qquad (D-1) x e^x = [1+x-x]\, e^x = e^x$$

$$u_3(x) = x^2 e^x \qquad (D-1) x^2 e^x = [2x + x^2 - x^2]\, e^x = 2x e^x$$

sono 3 soluzioni della eq. $L[u] = 0$.

ES 2. $\quad P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2 (\lambda-2)$

$$L[u] = P(D)[u] = 0$$

ha come soluzioni:

$$\begin{aligned} &u_1(x) = e^{2x} && \lambda_1 = 2 \\ &u_2(x) = e^{ix},\ u_3(x) = x e^{ix} && \lambda_2 = i \\ &u_4(x) = e^{-ix},\ u_5(x) = x e^{-ix} && \lambda_3 = -i \end{aligned}$$

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\}$$

Le soluzioni reali saranno combinazione delle funzioni: $e^{2x}, \sin x, \cos x, x \sin x, x\cos x$

tutte le soluzioni reali sono della forma:

$$u(x) = C_1 e^{2x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \sin x + C_5 x \cos x.$$

Teorema Le funzioni della forma:

$$u_k(x) = x^{m_k} e^{\lambda_k x}$$

sono linearmente indipendenti se non $(\lambda_k = \lambda_k \text{ e } m_k = m_j)$ $\forall\, k \neq j$.

→ Sappiamo risolvere l'eq. omogenea

$$P(D)[u] = 0$$

se sappiamo fattorizzare P.

ES

$$P(\lambda) = (\lambda + i + 1)(\lambda - i + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$u'' + 2u' + 2u = 0$$

$$\lambda_{12} = 1 \pm i \qquad e^{(1\pm i)x} = e^x e^{\pm i x}$$

$$u_1(x) = e^x \cos x \qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$u_2(x) = e^x \sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$u(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.$$

se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ queste sono tutte le soluzioni reali.

Eq. non omogenea.

$$L[u] = P(D)[u] = b$$

Basta trovare una soluzione u_* della non omogenea

↑ soluzione particolare

1 Metodo (di similarità) si applica se

$b = q(x)e$ con q polinomio

$$P(D)[u] = q(x)e^{\mu x}$$

In questo caso se $\mu \neq \lambda_k$ $\quad (P(\mu) \neq 0)$

c'è una soluzione della stessa forma:

$$u_*(x) = q_*(x)e^{\mu x} \quad \text{con } \deg q_* = \deg q.$$

ES $\qquad P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$$\to u'' - 3u' + 2u = \underset{q}{x} = x \cdot e^{0x} \qquad \mu = 0$$

$$u_*(x) = \underbrace{(a+bx)}_{q_*} \cdot \cancel{e^{0x}} = a + bx.$$

$$u_*'(x) = b$$

$$u_*''(x) = 0$$

$$\to 0 - 3b + 2(a+bx)\cancel{e^{0x}} = x\,\cancel{e^{0x}} \qquad \forall x$$

$$2bx + 2a - 3b = 1 \cdot x + 0$$

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ 2a = 3b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1/2 \\ a = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad u_*(x) = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}$$

Tutte le soluzioni della non omogenea sono:

$$u(x) = \overbrace{\frac{3}{4} + \frac{x}{2}}^{u_*} + \overbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}}^{\text{soluzione generale della omog.}}. \qquad \square$$

Perché funziona? $\qquad P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \cdots (D-\lambda_k)^{m_k}$

$$(D-\lambda_i)\, q(x)e^{\mu x} = \tilde{q}(x)e^{\mu x}$$

$$(D-\lambda_i)\, q(x)e^{\mu x}$$

se $\mu = \lambda_j$ $\qquad (D-\lambda_j)\, q(x)\ldots$

$$= (D-\mu)\, q(x) e^{\mu x} = q'(x)\, e^{\mu x}$$

se $P(\mu) = 0$

$$P(D)\left[q(x) e^{\mu x}\right] = \tilde{q}(x) e^{\mu x}$$

con $\deg \tilde{q} = \deg q - m$

m è la molteplicità di μ come radice di P.

$$\boxed{u^*(x) = x^m \cdot q_*(x)\, e^{\mu x}}$$

con $\deg q_* = \deg q$.

$\square$