

# Analisi Matematica B

## Soluzioni prova scritta parziale n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

4 maggio 2018

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' - u \sin x = \sin(2x), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Si tratta di una equazione lineare del primo ordine:  $u'(x) + a(x)u(x) = b(x)$ . Possiamo risolverla col metodo del fattore integrante, cioè moltiplicare l'equazione per  $e^{A(x)}$  con  $A \in \int a$ . Nel caso specifico bisogna moltiplicare per  $e^{\cos x}$  ottenendo:

$$u'e^{\cos x} - u \sin x e^{\cos x} = \sin(2x)e^{\cos x}$$

il lato sinistro è la derivata di un prodotto

$$(ue^{\cos x})' = 2 \sin x \cos x e^{\cos x}.$$

Integriamo il lato destro per sostituzione. Ponendo  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x dx$  si ottiene:

$$\int 2 \sin x \cos x e^{\cos x} dx = -2 \int ye^y dy$$

e poi per parti

$$-2 \int ye^y dy = -2ye^y + 2 \int e^y dy = (2 - 2y)e^y$$

da cui

$$ue^{\cos x} = (2 - 2 \cos x)e^{\cos x} + c.$$

Imponendo la condizione di cauchy  $u(0) = 1$  si ottiene

$$1e^1 = 0 + c$$

ovvero  $c = e$ . Dunque, moltiplicando tutto per  $e^{-\cos x}$  si ottiene:

$$u(x) = 2 - 2 \cos x + e^{1-\cos x}.$$

□

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 4u' + 3u = \frac{2e^{3x}}{e^x + 1} + 2 \sin x.$$

*Svolgimento.* Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine, non omogenea, a coefficienti costanti. Le soluzioni si ottengono sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alle soluzioni particolari delle omogenee con termine noto i due addendi al lato destro.

L'equazione omogenea associata è  $u'' - 4u' + 3u = 0$  si scrive nella forma  $P(D)u = 0$  se  $P$  è il polinomio associato  $P(z) = z^2 - 4z + 3$ . Il polinomio si fattorizza  $P(z) = (z - 3)(z - 1)$  e dunque due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea sono  $u_1(x) = e^{3x}$  e  $u_2(x) = e^x$ . La soluzione generale dell'omogenea sarà dunque della forma:

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea  $u'' - 4u' + 3u = 2 \sin x$ . Possiamo usare il metodo di similarità che ci garantisce che esiste una soluzione della forma

$$u(x) = a \sin x + b \cos x.$$

Per tale funzione si ha:

$$u'(x) = -b \sin x + a \cos x$$

$$u''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

e dunque l'equazione  $u'' - 4u' + 3u = 2 \sin x$  diventa

$$(-a + 4b + 3a) \sin x + (-b - 4a + 3b) \cos x = 2 \sin x$$

da cui, imponendo l'uguaglianza dei coefficienti delle funzioni (indipendenti)  $\sin x$  e  $\cos x$ , si trova

$$\begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 2b - 4a = 0 \end{cases}$$

che risolto dà:  $a = 1/5$ ,  $b = 2/5$ . Dunque una soluzione particolare è

$$u_3(x) = \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione  $u'' - 4u' + 3u = 2e^{3x}/e^x + 1$ . Utilizziamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cerchiamo quindi una soluzione della forma:

$$u(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x.$$

Se imponiamo che valga

$$c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = 0$$

la derivata è

$$u'(x) = 3c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x$$

e la derivata seconda:

$$u''(x) = 9c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^x + 3c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x.$$

Dunque affinché sia soddisfatta l'equazione si dovrà avere

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = 0 \\ 3c_1'(x)e^{3x} + c_2'(x)e^x = \frac{2e^{3x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

Risolviendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \\ c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Integrando con la sostituzione  $y = e^x$ ,  $dx = dy/y$  si ottiene

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{(y + 1)y} dy \\ &= \int \left[ \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1} \right] dy = \ln y - \ln(1 + y) = x - \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(x) &= - \int \frac{y^2}{(y + 1)y} dy = - \int \left[ 1 - \frac{y}{y^2 + 1} \right] dy \\ &= -y + \frac{1}{2} \int \frac{2y + 1}{y^2 + y} dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(y + 1)y} dy \\ &= -y + \frac{1}{2} \ln(y^2 + y) - \frac{1}{2} (\ln y - \ln(1 + y)) \\ &= -e^x + \frac{1}{2} (x + \ln(1 + e^x)) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \\ &= \ln(1 + e^x) - e^x. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione particolare cercata è

$$u_4(x) = [x - \ln(1 + e^x)] e^{3x} + [\ln(1 + e^x) - e^x] e^x.$$

La soluzione generale dell'equazione iniziale è dunque:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) \\ &= [c_1 + x - \ln(1 + e^x)] e^{3x} + [c_2 + \ln(1 + e^x) - e^x] e^x \\ &\quad + \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x \end{aligned}$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . □

3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{3x^2 \sqrt{1 - u^4}}{2u} \\ u(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

trovarne la soluzione verificando l'intervallo massimale di esistenza.

*Soluzione.* Si tratta di un problema di Cauchy con una equazione a variabili separabili. Osserviamo che l'equazione è definita solo se  $u \in [-1, 1]$  e  $u \neq 0$ . Visto che nel dato iniziale si ha  $u(0) > 0$  e visto che la soluzione dovrà essere continua e definita su un intervallo e non si può avere  $u(x) = 0$ , dovrà essere  $u(x) > 0$  per ogni  $x$ . Se  $u(x) = \pm 1$  il lato destro dell'equazione si annulla. Dunque le funzioni costanti  $u(x) = 1$  e  $u(x) = -1$  sono soluzioni dell'equazione differenziali ma non soddisfano la condizione iniziale. Osserviamo che l'equazione non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità perché la funzione sul lato destro non è lipschitziana in nessun intorno dei punti  $u = \pm 1$ . Dunque non possiamo escludere che la soluzione con dato iniziale  $u(0) = 1/\sqrt{2}$  possa "attaccarsi" alla soluzione stazionaria  $u(x) = 1$ .

Comunque, nei punti in cui  $u(x) < 1$  l'equazione risulta equivalente all'equazione a variabili separate:

$$\frac{2uu'}{\sqrt{1 - u^4}} = 3x^2.$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$\int \frac{2u \, du}{\sqrt{1 - u^4}} \ni x^3.$$

Per quanto riguarda il lato sinistro si nota che

$$\int \frac{2u \, du}{\sqrt{1 - u^4}} \ni \arcsin(u^2).$$

Dunque su ogni intervallo in cui  $u(x) \neq \pm 1$  si ha

$$\arcsin(u^2(x)) = x^3 + c.$$

In particolare se l'intervallo contiene il punto  $x = 0$  possiamo imporre la condizione iniziale  $u(0) = 1/\sqrt{2}$  da cui si ottiene  $c = \arcsin(1/2) = \pi/6$ . Ricordiamo ora che  $u(x) \in (0, 1)$  e dunque  $\arcsin(u^2(x)) \in (0, \pi/2)$  dunque dovrà essere

$$x^3 + \frac{\pi}{6} \in (0, \pi/2)$$

ovvero

$$-\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} < x \leq \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}.$$

Con tale condizione possiamo invertire l'arcoseno, ottenendo:

$$u^2(x) = \sin(x^3 + \pi/6).$$

Con la condizione che abbiamo già imposto risulta anche che il lato destro sia positivo, dunque possiamo invertire anche l'elevamento a quadrato ottenendo (ricordiamo che  $u > 0$ )

$$u(x) = \sqrt{\sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ora osserviamo che per  $x \rightarrow -\sqrt[3]{\pi/6}^+$  si ha  $u(x) \rightarrow 0$  e la soluzione non può essere estesa perchè il valore  $u = 0$  non è ammesso nell'equazione. Invece per  $x \rightarrow \sqrt[3]{\pi/3}$  si ha  $u(x) \rightarrow 1$  e, guardando l'equazione,  $u'(x) \rightarrow 0$ . Dunque possiamo estendere la soluzione ponendo  $u(x) = 1$  per  $x = \sqrt[3]{\pi/3}$ . A questo punto la soluzione costante  $u = 1$  è soluzione e dunque la funzione

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin(x^3 + \pi/6)} & \text{per } -\sqrt[3]{\pi/6} < x < \sqrt[3]{\pi/3} \\ 1 & \text{per } x \geq \sqrt[3]{\pi/3} \end{cases}$$

è una soluzione definita su un intervallo massimale. Non ci possono essere altre soluzioni, perché una volta che la soluzione ha raggiunto il valore  $u = 1$  non può diventare maggiore in quanto l'equazione non è definita per  $u > 1$ , e non può decrescere perché se la soluzione soddisfa l'equazione, si ha  $u'(x) \geq 0$  se  $u > 0$ .  $\square$