ANALISI MATEMATICA I

14.7.2014

SOLUZIONI

1.

$$x \log x = 1.$$

Posto $f(x) = x \log x$ si ha:

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 2\log 2 = \log(2^2) > \log e = 1.$$

(i) Essendo $f(1) < 1$, $f(2) > 1$, ed essendo f una funzione continua, si può applicare il Teorema dei valori intermedi per ottenere che esiste $x_0 \in (1, 2)$ tale che $f(x_0) = 1$ cioè $x_0 \log x_0 = 1$.

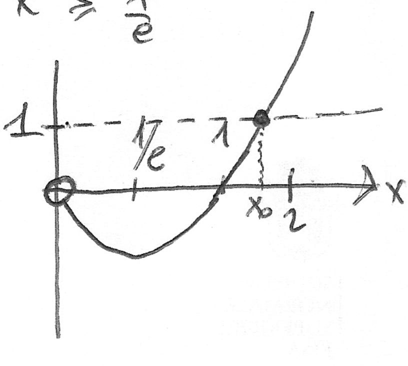
(ii) $f'(x) = \log x + 1$

x		0		$\frac{1}{e}$	
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$

f è strett. decrescente per $x \leq \frac{1}{e}$

f è strett. crescente per $x \geq \frac{1}{e}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$



./.

Nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ la funzione f è strettamente crescente quindi iniettiva. Dunque x_0 è l'unico punto in cui $f(x) = 1$ per $x \geq \frac{1}{e}$.

Se $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ la funzione è negativa in quanto $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e f è strettamente decrescente. Dunque non ci sono soluzioni in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Dunque $x_0 \in (1,2)$ è l'unica soluzione dell'equazione.

2.

$$\int_{-1}^{1} |x| \sin x \, dx = \int_{-1}^{0} (-x) \sin x \, dx + \int_{0}^{1} x \sin x \, dx .$$

$$\int x \sin x \, dx \overset{\text{per parti}}{=} -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x\cos x - \sin x + c$$

$$-\int_{-1}^{0} x \sin x \, dx = \Big[x\cos x + \sin x \Big]_{-1}^{0} = \cos(-1) - \sin(-1)$$

$$= \cos 1 + \sin 1$$

$$\int_{0}^{1} x \sin x \, dx = \Big[-x\cos x - \sin x \Big]_{0}^{1} = -\cos 1 - \sin 1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} |x| \sin x \, dx = \left(\cos 1 + \sin 1 \right) + \left(-\cos 1 - \sin 1 \right)$$

$$= 0 .$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA:

$f(x) = |x| \sin x$ è dispari $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \underset{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} -\int_{1}^{-1} f(-y)\, dy = -\int_{-1}^{1} f(y)\, dy$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \overset{!}{=} 0$$

$$I = -I \;\Downarrow\; I = 0$$

3. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3|a_n - 1| \end{cases}$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \cdot |1-1| = 0, \quad a_2 = 3 \cdot |0-1| = 3$

$a_3 = 3 \cdot |3-1| = 6$

1. (i) per $n=2$: $\quad a_2 = 3 \geq 3$.

(ii) se $a_n \geq 3 \Rightarrow |a_n - 1| \geq 2 \Rightarrow a_{n+1} = 3|a_n - 1| \geq 6$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq 3$.

Per induzione $\quad a_n \geq 3 \quad \forall n \geq 2$.

2. $$a_{n+1} = 3|a_n - 1| \underset{\Uparrow}{=} 3(a_n - 1) = 2a_n + \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 2}$$

$(n \geq 2 \Longrightarrow a_n \geq 3)$

$\geq 2a_n + 2 \geq 2a_n$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \qquad \forall n \geq 2$.

3. Per il criterio del rapporto, per $n \geq 2$

se $\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \\ a_n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Infatti $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per induzione}}}{\Rightarrow} a_n \geq 2^{n-2} a_2 \geq 2^{n-2} \cdot 3 \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos(n))\log(2^n+3^n)}{n!\,\log(1+2^{-n})}$$

$$0 \le \frac{(1-\cos(n))\log(2^n+3^n)}{n!\,\log(1+2^{-n})} \le \frac{\log(2^n+3^n)}{n!\,\log(1+2^{-n})}$$

Studio $\sum \frac{\log(2^n+3^n)}{n!\,\log(1+2^{-n})}$

$$n\log(3) = \log(3^n) \le \log(2^n+3^n) \le \log(3^{n+1}) = (n+1)\log(3)$$

$$\log(1+2^{-n}) = 2^{-n} + o(2^{-2n}) \geq \frac{1}{2}2^{-n} = 2^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log(2^n+3^n)}{n!\,\log(1+2^{-n})} < \frac{2(n+1)\log(3)}{n!\;2^{-n}} := a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2}(n+2)\cancel{\log(3)}}{(n+1)!\;2^{\cancel{-n}-1}}\;\frac{n!\;\cancel{2^{-n}}}{\cancel{2}(n+1)\cancel{\log(3)}} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge} \quad \Rightarrow$$

per il criterio del confronto converge anche la serie data.