Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

12 Luglio 2010- COMPITO 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{5n+n^2+8}$, (b) $\lim_{x\to 1^-}\left(3+e^{\frac{1}{x-1}}\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{\tan x+(\tan x)^3}{\sqrt{9-(\tan x)^2}}\ dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=e^{\frac{x+2}{|x+1|}}$.

4. (5 punti) Determinare gli insiemi di crescenza e decrescenza ed gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=\frac{x\log x}{(\log x-1)^2}$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y'=-y\tan x+y^2\sqrt{\sin x}$.

6. (3 punti) Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 3X - 1$ e $Z := 2 - 6X$.

7. (5 punti) I clienti di un supermercato provengono per il 25% dalla zona A della cittá, per il 45% da un'altra zona B, e per il rimanente 30 % dalla restante zona C. Da statistiche fatte risulta che solo il 10 % dei clienti provenienti da A raggiunge il supermercato con i mezzi pubblici, mentre questa percentuale sale al 65% per quelli provenienti da C e al 90% per quelli provenienti da B.

   a) Qual é la percentuale totale di clienti che arriva con i mezzi pubblici?

   b) Preso un cliente a caso arrivato con un mezzo pubblico, qual' la probabilitá che provenga dalla zona A?

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

12 Luglio 2010- COMPITO 2- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} n^2\tan(\frac{1}{n^3})\sqrt{2n+3n^2+1}$, $\quad (b)\quad \lim_{x\to 2^-}(e^{\frac{6}{x-2}}\cos(\frac{5}{x-2})-1)$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{(1+3\log x)}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}\quad dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=e^{\frac{|x+2|}{x+1}}$.

4. (5 punti) Determinare gli insiemi di crescenza e decrescenza ed gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=(x\log x)(\log x-1)^2$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y'=y\cos x\ +e^{\sin x}\log x$.

6. (3 punti) Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 2X + 3$ e $Z := 3 - 4X$.

7. (5 punti) I clienti di un supermercato provengono per il 30% dalla zona A della cittá, per il 50% da un'altra zona B, e per il rimanente 320 % dalla restante zona C. Da statistiche fatte risulta che solo il 50 % dei clienti provenienti da A raggiunge il supermercato con i mezzi pubblici, mentre questa percentuale sale al 80% per quelli provenienti da C e al 90% per quelli provenienti da B.

   a) Qual é la percentuale totale di clienti che arriva con i mezzi pubblici?

   b) Preso un cliente a caso arrivato con un mezzo pubblico, qual' la probabilitá che provenga dalla zona A?

8. (8 punti) **Proprietá della funzione integrale e Teorema Fondamentale del Calcolo integrale**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

Soluzioni dei compiti del 12 Luglio 2010

COMPITI 1-3-5

1. $(a) = 1$ e $(b) = 3$

2. $\tan x = t$, $x = \arctan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ si ottiene:

$$\int \frac{t+t^3}{(\sqrt{9-t^2})(1+t^2)}dt = \int \frac{t}{\sqrt{9-t^2}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{-2t}{(9-t^2)^{\frac{1}{2}}}dt == -(9-t^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

3. f é definita $x \neq -1$ si ha

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$$

$x = -1$ asintoto verticale.
Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{-1}$, la funzione ha asintoti orizzontali a $+\infty$ e a $-\infty$.

4. f é definita per $x > 0$ e $x \neq e$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{(\log x)^2 - 1 - 2\log x)}{(\log x - 1)^3}$$

$f'(x) < 0$ (f decrescente) in $0 < x < e^{1-\sqrt{2}}$ e in $e < x < e^{1+\sqrt{2}}$ $f > 0$ (f crescente) in $e^{1-\sqrt{2}} < x < e$ e $e^{1+\sqrt{2}} < x$.
Inoltre $x = e^{1-\sqrt{2}}$ minimo assoluto e $x = e^{1+\sqrt{2}}$ minimo relativo La funzione non ha valore massimo.

5. Equazione di Bernoulli, pongo $z = \frac{1}{y}$, e quindi l'equazione diventa:

$$z' = (\tan x)z - \sqrt{\sin x}$$

da cui si ottiene:

$$z(x) = e^{-\log(\cos x)}(-\int e^{\log(\cos x)}\sqrt{\sin x}dx + C)$$

quindi

$$z(x) = \frac{1}{\cos x}(-\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C) = \frac{C}{\cos x} - \frac{2(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{3\cos x}$$

da cui si ricava $y = \frac{\cos x}{C - \frac{2}{3}\sqrt{(\sin x)^3}}$.

6. Si deve applicare la formula:

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y], \qquad V[\alpha X + \beta Y] = \alpha^2 V[X] + \beta^2 V[Y]$$

quindi

$$E[3X-1] = 3E[X] - E[1] = 6 - 1 = 5,\ V[3X-1] = 3^2 V[X] + V[1] = 9 + 0 = 9$$
$$E[2-6X] = -10,\ V[2-6X] = 36$$

7. Evento $A, B.C$ venire dalla zona $A, B.C$

$$P(A) = 0,25, \quad P(B) = 0,45, \quad P(C) = 0,3$$

. S prendere l'autobus:

$$P(S/A) = 0,1, \quad P(S/B) = 0,9, \quad P(s/C) = 0,65$$

. (a) si ottiene dalla legge della probabilitá composta:

$$P(S) = P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C)$$

(b) Dalla formula di Bayes

$$P(A/S) = \frac{P(S/A)P(A)}{P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C)}$$

. Facendo i conti si ottiene (a) $0,625$ e (b) $0,04$.

COMPITI 2-4-6

1. $(a) = \sqrt{3}$ e $(b) = -1$

2. $\log x = t$, $\frac{dx}{t} = dt$ si ottiene:

$$\int \frac{1+3t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{3}{2} \int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t - 3(1-t^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

3. f é definita $x \neq -1$ si ha

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$x = -1$ asintoto verticale a sinistra.

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = 0$$

Inoltre $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{-1}$, la funzione ha asintoti orizzontali a $+\infty$ e a $-\infty$

4. f é definita per $x > 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = (\log x)^2 - 1 - 2\log x)(\log x - 1)$$

$f'(x) < 0$ (f decrescente) in $0 < x < e^{-1-\sqrt{2}}$ e in $e < x < e^{-1+\sqrt{2}}$ $f > 0$ (f crescente) in $e^{-1-\sqrt{2}} < x < e$ e $e^{-1+\sqrt{2}} < x$. $x = e^{-1-\sqrt{2}}$ minimo relativo e $x = e$ massimo relativo.

5. Equazione di primo grado lineare:

$$y(x) = e^{\sin x}(\int e^{-\sin x} \log x e^{\sin x} dx + C)$$

poiché

$$\int \log dx = x \log x - x + C$$

segue

$$y(x) = e^{\sin x}(x \log x - x + C) = Ce^{\sin x} + e^{\sin x}(x \log x - x).$$

6. Procedimento analogo al compito 1

$$E[2X+3] = 7, \ V[2X+3] = 4$$

$$E[3-4X] = -5, \ V[3-4X] = 16$$

7. Procedimento analogo al compito 1 e (a) 0,76 (b) 0,19.