

Matematica (gruppo A)

(Probabilità e Statistica)

Cdl Biologia, a.a. 2011-2012

10 febbraio 2012

Esercizio. (1A) In una coltura cellulare sono state marcate 87 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.7% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

Soluzione. La probabilità che una cellula marcata venga esaminata al microscopio è data da $a = 0.007$. La probabilità che su $n = 87$ cellule marcate ne vengano esaminate esattamente $k = 3$ è data quindi dalla distribuzione binomiale:

$$P = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} = 2.0\%$$

Esercizio. (1B) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 8.5 volte alla settimana. Qual è la probabilità che in una giornata si vedano passare tre camosci?

Soluzione. Il numero medio di camosci che si osservano in un giorno è $\lambda = 8.5/7 = 1.21$. La probabilità che in un giorno se ne vedano tre è data dalla distribuzione di Poisson di media λ con $k = 3$

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0.089 = 8.9\%$$

Esercizio. (1C) In una coltura cellulare sono state marcate 97 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.7% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

Soluzione. $P = 2.6\%$

Esercizio. (1D) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 0.85 volte al giorno. Qual è la probabilità che in una settimana si vedano passare 3 camosci?

Soluzione. $\lambda = 0.85 \cdot 7 = 5.95$ $P = 9.1\%$

Esercizio. (1E) In una coltura cellulare sono state marcate 97 cellule. Esaminando al microscopio lo 0.8% delle cellule dell'intera coltura, qual è la probabilità di trovarne esattamente 3 marcate?

Soluzione. $P = 3.5\%$

Esercizio. (1F) Durante l'estate in una postazione montana viene osservato il passaggio di un camoscio in media 9.5 volte alla settimana. Qual è la probabilità che in una giornata si vedano passare tre camosci?

Soluzione. $\lambda = 9.5/7 = 1.36$, $p = 10.8\%$

Esercizio. (2A) Al lancio di un dado si vince un euro se esce un numero pari e si perde un euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

Soluzione. Ad ogni giocata con probabilità $\frac{1}{2}$ si guadagna 1 euro, con probabilità $\frac{1}{6}$ si "guadagna" -1 euro e con probabilità $\frac{1}{3}$ si guadagnano 0 euro. Calcoliamo

media e varianza del guadagno in una giocata:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 = 0.556\end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità del guadagno X dopo $n = 100$ giocate ha media $m = n\mu = 33.33$ e deviazione standard $s = \sqrt{n\sigma^2} = 7.4535$. La probabilità di guadagnare più di 40 euro è data da $P(X > 40.5)$ (in quanto X assume solo valori interi) e approssimando la distribuzione di X con una gaussiana si ha

$$\begin{aligned}P(X > 40.5) &= P\left(Z > \frac{40.5 - m}{s}\right) = P(Z > 0.96) \\ &= 0.5 - \Phi(0.96) = 0.5 - 0.33 = 0.17 = 17\%\end{aligned}$$

Esercizio. (2B) Al lancio di un dado si vincono 4 euro se esce il numero 4 e si perde un euro se esce un numero dispari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

Soluzione. $\mu = 0.1667$, $\sigma^2 = 3.1489$, $m = 16.67$, $s = 17.72$, $Z > 1.35$, $P = 0.5 - 0.411 = 8.9\%$

Esercizio. (2C) Al lancio di un dado si vincono 3 euro se esce un numero pari e si perdono 2 euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 90 euro?

Soluzione. $\mu = 1.1667$, $\sigma^2 = 3.806$, $m = 116.67$, $s = 19.51$, $Z > 0.197$, $P = 0.5 - 0.07 = 42\%$

Esercizio. (2D) Al lancio di un dado si vincono 6 euro se esce il numero 4 e si perde un euro se esce un numero dispari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 60 euro?

Soluzione. $\mu = 0.5$, $\sigma^2 = 6.25$, $m = 50.0$, $s = 25.0$, $Z > 0.42$, $P = 0.5 - 0.16 = 34\%$

Esercizio. (2E) Al lancio di un dado si vincono 3 euro se esce un numero pari e si perde 1 euro se esce il numero 5. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 150 euro?

Soluzione. $\mu = 1.333$, $\sigma^2 = 2.889$, $m = 133.3$, $s = 17.00$, $Z > 1.01$, $P = 0.5 - 0.34 = 16\%$

Esercizio. (2F) Al lancio di un dado si vincono 5 euro se esce il numero 5 e si perde un euro se esce un numero pari. Non si guadagna e non si perde niente negli altri casi. Calcolare media e varianza del guadagno in un lancio del dado. Dopo 100 giocate qual è la probabilità di avere guadagnato più di 40 euro?

Soluzione. $\mu = 0.333$, $\sigma^2 = 4.5556$, $m = 33.3$, $s = 21.34$, $Z > 0.34$, $P = 0.5 - 0.13 = 37\%$