

# Analisi Matematica I e II modulo

## Soluzioni prova scritta

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

10 giugno 2005

1. Determinare gli intervalli di monotonia della funzione

$$f(x) = \sin x - \cos x.$$

*Soluzione.* Si ha  $f'(x) = \cos x + \sin x$  e dunque  $f'(x) \geq 0$  se e solo se  $\sin x \geq -\cos x$  ovvero  $x \in [-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Dunque  $f$  è strettamente crescente sugli intervalli del tipo  $[2k\pi - \frac{1}{4}\pi, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi]$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Analogamente si trova che  $f$  è strettamente decrescente sugli intervalli  $[2k\pi + \frac{3}{4}\pi, 2k\pi + \frac{7}{4}\pi]$ .

2. Si consideri la funzione  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(y) = y - \operatorname{arctg}(y-1) - 1.$$

- (a) Si dimostri che  $g$  è bigettiva e si chiami  $f = g^{-1}$  la funzione inversa di  $g$ .
- (b) Dire in quali punti la funzione  $f$  risulta essere derivabile.
- (c) Dimostrare che  $f$  è strettamente crescente.
- (d) Sia  $y = m(\bar{x})x + q(\bar{x})$  l'equazione della retta tangente al grafico  $y = f(x)$  nel punto  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ . Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow +\infty} m(\bar{x}), \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow +\infty} q(\bar{x}).$$

*Soluzione.* Si ha

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{1 + (y-1)^2}.$$

Notiamo che  $1 + (y-1)^2 \geq 0$  e dunque  $g'(y) \geq 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , inoltre  $g'(y)$  si annulla solamente quando  $(y-1)^2 = 0$  ovvero per  $y = 1$ . Dunque  $g$  è strettamente crescente sugli intervalli  $[0, +\infty)$  e  $(-\infty, 0]$  (al cui interno la derivata è strettamente positiva) e di conseguenza è strettamente crescente su tutto  $\mathbb{R}$ . Dunque  $g$  è iniettiva.

Si ha inoltre

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = -\infty.$$

Applicando il teorema degli zeri si dimostra quindi facilmente che  $g$  assume tutti i valori di  $\mathbb{R}$  ovvero è surgettiva.

Essendo bigettiva  $g$  è invertibile e la sua inversa  $f$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Inoltre, dal teorema di derivazione della funzione inversa sappiamo che  $f(x)$  è derivabile nei punti  $x$  in cui  $g'(f(x)) \neq 0$ . Siccome  $g$  è strettamente crescente anche la sua inversa  $f$  lo è. Infatti

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

La retta tangente nel punto  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  al grafico di  $f$  ha equazione

$$y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) = \frac{1}{g'(f(\bar{x}))}(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$$

da cui

$$m(\bar{x}) = \frac{1}{g'(f(\bar{x}))}, \quad q(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \frac{\bar{x}}{g'(f(\bar{x}))}$$

Notiamo che

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow +\infty} f(\bar{x}) = +\infty$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{g'(y)} = 1$$

mentre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} y - \frac{g(y)}{g'(y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y + (1 + (y-1)^2)(\operatorname{arctg}(y-1) + 1)}{(y-1)^2} \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Si consideri la funzione  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x e^{-t^4} dt.$$

Dire se  $f$

- (a) è continua;
- (b) è uniformemente continua;
- (c) è lipschitziana;
- (d) è derivabile.

*Soluzione.* Notiamo che la funzione  $e^{-x^4}$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$  e quindi è integrabile su ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ . Dunque  $f$  è ben definita. Inoltre considerando la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^4} dt$$

dal teorema fondamentale del calcolo sappiamo che  $F$  è derivabile e  $F'(x) = e^{-x^4}$ . Inoltre possiamo scrivere

$$f(x) = F(x) - F(\sqrt{x}).$$

Visto che  $F$  è continua e  $\sqrt{x}$  è continua, anche  $f$  è continua essendo somma e composizione di funzioni continue. Inoltre  $\sqrt{x}$  è derivabile per  $x > 0$ , e  $F$  è derivabile per ogni  $x$ , dunque  $f$  è derivabile per  $x > 0$  e si ha

$$f'(x) = F'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) = e^{-x^4} - \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}.$$

Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$  e dunque applicando il teorema de L'Hôpital al rapporto incrementale di  $f$  in 0, si trova che  $f$  non è derivabile in 0. Complessivamente  $f$  non è dunque una funzione derivabile. Inoltre la derivata (dove esiste) non è limitata e dunque  $f$  non è neanche lipschitziana.

Notiamo però che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Questo significa che la derivata di  $f$  è limitata sull'intervallo  $[0, +\infty)$ . Dunque su tale intervallo la funzione è lipschitziana e anche uniformemente continua. D'altra parte  $f$  è continua e dunque è uniformemente continua sull'intervallo chiuso e limitato  $[0, 1]$ . Concludiamo quindi che  $f$  è uniformemente continua su tutto il suo dominio  $[0, +\infty)$ .

4. Determinare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{k^3} - e^k}{2^k}.$$

*Soluzione.* Sappiamo che la successione notevole  $(1 + 1/k)^k$  converge crescendo ad  $e$ , dunque si ha  $(1 + 1/k)^k < e$  per ogni  $k$ . In particolare la serie data è a termini negativi. Studiamo dunque la serie con i termini cambiati di segno, visto che cambiando segno a tutti i termini il carattere della serie non cambia.

Ricordando gli sviluppi di Taylor per  $x \rightarrow 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \exp(x) = 1 + x + o(x),$$

si ha, per  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{e^k - \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{k^3}}{2^k} &= e^k \frac{1 - \exp\left(k^3 \log\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - k\right)}{2^k} \\ &= (e/2)^k \left\{ 1 - \exp\left[k^3 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) - k\right] \right\} \\ &= (e/2)^k \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right] \right\} = (e/2)^k \left\{ \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \\ &\rightarrow +\infty \quad \text{per } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie non è infinitesima, ed essendo a termini negativi diverge a  $-\infty$ .