

Analisi Matematica I modulo

Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

29 novembre 2004

1. (a) Calcolare il seguente limite:

****A*******

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \log n)^n}{n^n}.$$

Soluzione. Si ha

$$\frac{(n + \log n)^n}{n^n} = \left(\frac{n + \log n}{n} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{n}{\log n}} \right]^{\log n} \xrightarrow{\substack{e \\ \uparrow}} \xrightarrow{\substack{+\infty \\ \uparrow}} +\infty.$$

- (b) Calcolare il seguente limite:

****B*******

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^n}{1 + e^n} \right)^{\sqrt{n}}.$$

Soluzione. Si ha

$$\left(\frac{e^n}{1 + e^n} \right)^{\sqrt{n}} = \left(\frac{1 + e^n - 1}{1 + e^n} \right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1 - \frac{1}{1 + e^n} \right)^{-(1 + e^n)} \right]^{\frac{\sqrt{n}}{1 + e^n} \rightarrow 0} \xrightarrow{\substack{e \\ \uparrow}} 1$$

- (c) Calcolare il seguente limite:

****C*******

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[4]{n}}.$$

Soluzione.

$$\left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[4]{n}} = \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right)^{-\sqrt[4]{n}} \right]^{-1} \rightarrow e^{-1}$$

(d) Calcolare il seguente limite:

D**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n + n^2} \right)^n.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{n + n^2} \right)^n &= \left(\frac{n}{1 + n} \right)^n = \left(\frac{1 + n - 1}{1 + n} \right)^n \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{1 + n} \right)^{-(n+1)} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \rightarrow e^{-1} \end{aligned}$$

A**

2. (a) Si consideri la successione

$$a_n = \cos \frac{7\pi n(1 + n^2)}{3n^2}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

Soluzione. Notiamo che si ha

$$\frac{7\pi n(1 + n^2)}{3n^2} = \frac{7}{3}\pi n + \frac{7\pi}{n} = \frac{7}{3}\pi n + \varepsilon_n$$

dove $\varepsilon_n = 7\pi/n$ è una successione che tende a zero. Consideriamo le sei diverse successioni di indici

$$n_k = 6k + j$$

con $j = 0, \dots, 5$. Le corrispondenti estratte a_{n_k} sono

$$\begin{aligned} a_{n_k} &= \cos \left(\frac{7\pi(6k + j)}{3} + \varepsilon_{n_k} \right) = \cos \left(14k\pi + \frac{7}{3}\pi j + \varepsilon_{n_k} \right) \\ &= \cos \left(\frac{7}{3}\pi j + \varepsilon_{n_k} \right) \rightarrow \cos \left(\frac{7}{3}\pi j \right). \end{aligned}$$

Al variare di $j = 0, \dots, 5$ abbiamo dunque ottenuto i seguenti limiti

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(7\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(14\pi/3) = \cos(2\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \cos(21\pi/3) = \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos(28\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(35\pi/3) = \cos(5\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato 4 diversi valori limite: $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$. Sicuramente non ci sono altri valori limite diversi da questi, infatti presa una qualunque estratta a_{n_k} , la successione di indici n_k deve avere infiniti indici in comune con almeno una delle sei estratte $n_k = 6k + j$ che abbiamo considerato. In conclusione l'insieme dei valori limite è: $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

- (b) Si consideri la successione

B*

$$a_n = \sin \frac{7\pi n(1+n^2)}{3n^2}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

Soluzione. La soluzione è analoga all'esercizio precedente. L'insieme dei valori limite risulta essere $\{\sin(7\pi j/3) : j = 0, \dots, 5\} = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

- (c) Si consideri la successione

C*

$$a_n = \cos \frac{7\pi n(1+3^n)}{3^{n+1}}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

Soluzione. La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 2(a); l'insieme dei punti limite è: $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

- (d) Si consideri la successione

D*

$$a_n = \sin \frac{7\pi n(1+3^n)}{3^{n+1}}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

Soluzione. La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 2(b); l'insieme dei punti limite è: $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

3. (a) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza:

A*

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = \frac{(a_n - 2)^2}{3} \end{cases}$$

- i. Determinare i valori di \bar{x} per i quali la successione a_n risulta essere costante.
- ii. Determinare il limite della successione a_n nel caso in cui $\bar{x} = 10$.
- iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 1$.

iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -6$.

Soluzione. Siamo nel caso in cui $a_{n+1} = f(a_n)$ con

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{3}.$$

La successione a_n è costante se e solo se si ha $f(\bar{x}) = \bar{x}$. L'equazione di secondo grado $f(x) = x$ ha due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Dunque la successione è costante solo nel caso in cui \bar{x} sia uno di questi due valori.

In generale, se supponiamo che esista $\lim a_n = a$, passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ si nota che gli unici valori per a sono $a = +\infty$ oppure $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = a$ cioè $a = x_{1,2}$.

Notiamo che si ha

$$f(x) > x \iff x > x_2 \quad \text{o} \quad x < x_1.$$

inoltre f è crescente sull'intervallo $I = (x_2, +\infty)$ e quindi $f(I) \subset I$. Nel caso $\bar{x} = 10 > x_2$ si ha $a_1 \in I$ e quindi la successione a_n è sempre inclusa nell'intervallo I ed è strettamente crescente. Di conseguenza a_n ammette limite $a_n \rightarrow a$, ed essendo a_n crescente dev'essere $a \geq a_1 = 10 > x_2$. Dunque necessariamente deve essere $a = +\infty$.

Passiamo ora al caso $\bar{x} = 1$. In questo caso cerchiamo un intervallo I contenente il punto $\bar{x} = 1$, in cui f risulti essere decrescente e tale che $f(I) \subset I$. Perché f sia decrescente dev'essere $I \subset (-\infty, 2]$. Notiamo che $f(2) = 0$ e che $f(0) = \frac{4}{3} < 2$. Dunque l'intervallo $I = [0, 2]$ ha le proprietà richieste. Di conseguenza le estratte con indici pari a_{2n} e quelle con indici dispari a_{2n+1} verificano l'equazione

$$a_{2n+2} = f(f(a_{2n})), \quad a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1})).$$

Visto che $f(f(x))$ è crescente, entrambe queste estratte sono monotone e dunque le due estratte convergono a due valori dell'intervallo I . Entrambi questi valori devono però soddisfare l'equazione $f(f(x)) = x$ che per esteso risulta essere una equazione di quarto grado:

$$x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 11x + 4 = 0.$$

Per risolvere questa equazione osserviamo che le soluzioni di $f(x) = x$ sono anche soluzioni di $f(f(x)) = x$ e dunque il polinomio di quarto grado deve essere divisibile per il polinomio $f(f(x)) - x$. Infatti si ha

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 11x + 4}{x^2 - 7x + 4} = x^2 - x + 1.$$

Dunque le soluzioni di $f(f(x)) = x$ sono le soluzioni di $f(x) = x$ (che abbiamo già determinato) più le soluzioni di $x^2 - x + 1 = 0$. Visto che quest'ultima equazione non ha soluzioni, possiamo concludere che l'equazione $f(f(x)) = x$ ha due soluzioni: x_1 e x_2 . L'unica di queste due soluzioni che appartiene all'intervallo $I = [0, 2]$ è x_1 e quindi concludiamo che se $\bar{x} = 1$ si ha $a_n \rightarrow x_1 = (7 - \sqrt{33})/2$.

Consideriamo ora il caso $\bar{x} = -6$. Notiamo che $f((1 - \sqrt{33})/2) = x_2$ e che $\bar{x} = -6 < \frac{1-\sqrt{33}}{2}$. Dunque (ricordando che f è decrescente per $x \leq 2$), si ha $a_2 = f(a_1) = f(\bar{x}) > x_2$. Ne consegue che da a_2 in poi la successione a_n è maggiore di x_2 ed è strettamente crescente. Dunque, come per il caso $\bar{x} = 10$ si ottiene $a_n \rightarrow +\infty$.

- (b) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****B****

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = -\frac{(a_n+2)^2}{3}. \end{cases}$$

- i. Determinare i valori di \bar{x} per i quali la successione a_n risulta essere costante.
- ii. Determinare il limite della successione a_n nel caso in cui $\bar{x} = -12$.
- iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -1$.
- iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 6$.

Soluzione. Si procede in maniera analoga al caso precedente. Le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Per $\bar{x} = -12$ si ottiene una successione $a_n \rightarrow -\infty$. Nel caso $\bar{x} = 1$ si ha $a_n \rightarrow \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$. Nel caso $\bar{x} = 6$ si ha $a_n \rightarrow -\infty$.

- (c) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****C****

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{3} - 2\right)^2. \end{cases}$$

- i. Determinare i valori di \bar{x} per i quali la successione a_n risulta essere costante.
- ii. Determinare il limite della successione a_n nel caso in cui $\bar{x} = 22$.
- iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 3$.
- iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -18$.

Soluzione. La soluzione è analoga al caso (a). In questo caso le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{21 \pm 3\sqrt{33}}{2}.$$

Sia nel caso $\bar{x} = 22$ che nel caso $\bar{x} = -18$ si ha $a_n \rightarrow +\infty$. Nel caso $\bar{x} = 3$ si trova $a_n \rightarrow \frac{21-3\sqrt{33}}{2}$.

- (d) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****D***

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = -\left(\frac{a_n}{2} + 2\right)^2. \end{cases}$$

- i. Determinare i valori di \bar{x} per i quali la successione a_n risulta essere costante.
- ii. Determinare il limite della successione a_n nel caso in cui $\bar{x} = -21$.
- iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -2$.
- iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 12$.

Soluzione. La soluzione è analoga al caso (a). In questo caso le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{-21 \pm 3\sqrt{33}}{2}.$$

Sia nel caso $\bar{x} = -21$ che nel caso $\bar{x} = 12$ si ha $a_n \rightarrow +\infty$. Nel caso $\bar{x} = -2$ si trova $a_n \rightarrow \frac{3\sqrt{33}-21}{2}$.

4. (a) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione *****A**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2 + \log(x^2)).$$

Soluzione. Consideriamo la successione

$$x_n = \exp(\pi/4 - \pi n/2 - 1).$$

Se il limite in questione esistesse, visto che $x_n \rightarrow 0$, anche il limite della successione corrispondente

$$a_n = \sin(2 + \log(x_n^2))$$

dovrebbe esistere ma si nota che

$$a_n = \sin(\pi/2 - \pi n) = (-1)^n$$

e quindi a_n non ammette limite. In conclusione il limite cercato non esiste.

- (b) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione *****B**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1 + \log(x^4)).$$

Soluzione. Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(-\pi n/4 - 1/2).$$

Il limite non esiste.

- (c) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione

*****C**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1 + \log(x^2)).$$

Soluzione. Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(\pi/4 - \pi n/2 - 1/2).$$

Il limite non esiste.

- (d) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione

*****D**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2 + \log(x^4)).$$

Soluzione. Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(-\pi n/4 - 1/2).$$

Il limite non esiste.