

Secondo compito di Analisi Matematica I
Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 18 dicembre 2003

1)

a) Si risolva il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{-\frac{1}{\ln(x)}}.$$

b) Si studi la convergenza della seguente serie, al variare del parametro reale α :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{(n^\alpha)} + 2n^2 \ln(\cos(1/n)).$$

2) Si studi la funzione

$$f(x) = e^{-\sin x}.$$

Successivamente, si dica quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = y$ al variare del parametro $y \in \mathbb{R}$; infine, si dica quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ nell'intervallo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{2x}{1+x^2} \right).$$

Si individuino l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ in cui f è definita e continua, e l'insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ in cui f è derivabile. Si studi quindi la funzione in A , tracciandone un grafico approssimativo.

4) [Facoltativo] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto con derivata f' monotona. Si mostri che f' è una funzione continua.