Categoría seccional abstracta en diferentes estructuras de modelos sobre los espacios topológicos

de Marco Moraschini (UNIPI)
Trabajo conjunto con Prof. Aniceto Murillo (UMA)

UNIVERSITÀ DI PISA

V Encuentro de Jóvenes Topólogos

Tabla de contenidos

Tabla de Contenidos

La Categoría LS

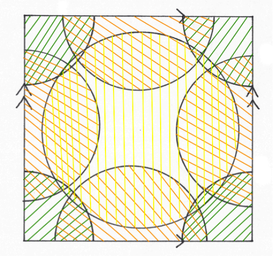
Definición (Lusternik-Schnirelmann 1934)

La *categoría de Lusternik-Schnirelmann* (o *categoría LS*) de un espacio topológico X, $\mathbf{cat}(X)$, es un invariante homotópico que vale n si $n+1$ es el numero mínimo de conjuntos abiertos y contráctiles en X que recubren el espacio entero.

La Categoría LS

Definición (Lusternik-Schnirelmann 1934)

La *categoría de Lusternik-Schnirelmann* (o *categoría LS*) de un espacio topológico X, $\mathbf{cat}(X)$, es un invariante homotópico que vale n si $n+1$ es el numero mínimo de conjuntos abiertos y contráctiles en X que recubren el espacio entero.



$\mathbf{cat}(\mathbb{S}^2) = 1.$ $\mathbf{cat}(\mathbb{T}^2) = 2.$

La Categoría Seccional

Definición (Schwarz 1966)

La categoría seccional de una fibración $p\colon E \to B$, $\mathbf{secat}(f)$, es el mínimo entero n tal que B se puede recubrir con $n+1$ subconjuntos abiertos de manera que f admite una sección local en cada uno de los abiertos.

La Categoría Seccional

Definición (Schwarz 1966)

La categoría seccional de una fibración $p\colon E \to B$, **secat**(f), es el mínimo entero n tal que B se puede recubrir con $n+1$ subconjuntos abiertos de manera que f admite una sección local en cada uno de los abiertos.

Proposición (Schwarz 1966)

Si E es contráctil, entonces

$$secat(p) = cat(B).$$

El Join

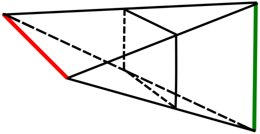
Teorema (Schwarz 1966)

Sea $p\colon E \to B$ una fibración, con B paracompacto. Entonces $\mathbf{secat}(p) \leq n$ si y solo si $p_n\colon *_B^n E \to B$ admite una seccion continua.

El Join

Teorema (Schwarz 1966)

Sea $p\colon E \to B$ una fibración, con B paracompacto. Entonces $\mathbf{secat}(p) \leq n$ si y solo si $p_n\colon \ast_B^n E \to B$ admite una seccion continua.



Es el espacio total del join $p_1 : [0,1] \ast_{x_0} [0,1] \to x_0$, donde $p : [0,1] \to x_0$.

Tabla de Contenidos

Categorías de modelos propias **C**

Definición

Una *categoría de modelos propia* **C** es una categoría con tres clases de morfismos:

$$\text{cofibraciones } (\rightarrowtail), \text{ fibraciones } (\twoheadrightarrow), \text{ equivalencias débiles } (\xrightarrow{\sim})$$

y satisfaciendo ciertos axiomas.

Estructura de Quillen (Quillen 1967)

La categoría **Top** es una *categoría de modelos propia* con la siguiente estructura:

- *Fibraciones* = fibraciones de Serre.
- *Equivalencias débiles* = equivalencias de homotopía débiles.
- *Cofibraciones* = todos los morfismos que llevan la *LLP* respecto a las fibraciones triviales.

Estructura de Quillen (Quillen 1967)

La categoría **Top** es una *categoría de modelos propia* con la siguiente estructura:

- *Fibraciones* = fibraciones de Serre.
- *Equivalencias débiles* = equivalencias de homotopía débiles.
- *Cofibraciones* = todos los morfismos que llevan la *LLP* respecto a las fibraciones triviales.

Estructura de Strøm (Strøm 1972)

La categoría **Top** es una *categoría de modelos propria* con la estructura siguiente:

- *Fibraciones* = fibraciones de Hurewicz.
- *Equivalencias débiles* = equivalencias de homotopía.
- *Cofibraciones* = cofibraciones topológicas cerradas.

Definición

Si f y g son dos morfismos, el *morfismo join* entre ellos es $j : A *_B C \to B$.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "\bar f"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[ddd, two heads, "\bar p"'] & & E \arrow[ddd, two heads, "p"] & C \arrow[l, "\sim", "\tau"'] \arrow[dddl, two heads, "g"] \\
& Z \arrow[ur, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, "\bar p'"'] & & \\
& A *_B C \arrow[ddr, dotted, "j"] & & \\
A \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "f"'] & & B. &
\end{tikzcd}$$

Definición

Si f y g son dos morfismos, el *morfismo join* entre ellos es $j : A *_B C \to B$.

$$
\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[ddd, two heads, "\bar{p}"'] & & E \arrow[ddd, two heads, "p"] & C \arrow[l, "\sim", "\tau"'] \arrow[dddl, two heads, "g"] \\
& Z \arrow[ur, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, "\bar{p}'"'] & & \\
& A *_B C \arrow[dr, dotted, "j"] & & \\
A \arrow[ur, tail, "i'"] \arrow[rr, "f"'] & & B\,. &
\end{tikzcd}
$$

Proposición (Doeraene 1993)

La construcción de arriba en la estructura de modelos de Strøm es homotópicamente equivalente a la definición topológica clásica.

La Categoría Seccional Abstracta (Díaz-J.García-P.García-Murillo-Remedios 2012)

Definición

Sea $p : E \to B$ es un morfísmo en **C**. La *categoría seccional abstracta de* p, *secat(p)*, es el mínimo entero $n \leq \infty$ tal que el join

$$p_n \colon E *_B (*_B^{n-1} E) \to B$$

admite una seccion débil.

La Categoría Seccional Abstracta (Díaz-J.García-P.García-Murillo-Remedios 2012)

Definición

Sea $p : E \to B$ es un morfísmo en $\mathbf{C}$. La *categoría seccional abstracta de* p, *secat*(p), es el mínimo entero $n \leq \infty$ tal que el join

$$p_n \colon E *_B (*_B^{n-1} E) \to B$$

admite una seccion débil.

Proposición

Si $p \colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz y B es paracompacto, entonces en la estructura de Strøm tenemos:

$$\mathbf{secat}(p) = secat(p).$$

Como Relacionar Dos Categorías de Modelos Propias

Teorema (Díaz-J.García-P.García-Murillo-Remedios 2012)

Sean $\mu\colon \mathbf{C} \leftrightarrows \mathbf{D} : \nu$ dos funtores de modelos y sea f un morfismo en $\mathbf{C}$ débilmente equivalente a $\nu(\mu(f))$. Entonces:

$$secat^{\mathbf{D}}(\mu(f)) = secat^{\mathbf{C}}(f).$$

Como Relacionar Dos Categorías de Modelos Propias

Teorema (Díaz-J.García-P.García-Murillo-Remedios 2012)

Sean $\mu\colon \mathbf{C} \leftrightarrows \mathbf{D} : \nu$ dos funtores de modelos y sea f un morfismo en $\mathbf{C}$ débilmente equivalente a $\nu(\mu(f))$. Entonces:

$$secat^{\mathbf{D}}(\mu(f)) = secat^{\mathbf{C}}(f).$$

Corolario (M-Murillo 2016)

Sea f un morfísmo en la estructura de Quillen $\mathbf{Top}^{Q}$. Entonces:

$$secat^{\mathbf{Top}^{Q}}(f) = secat^{\mathbf{sSet}}(\mathcal{S}(f)).$$

Contraejemplo

$$\text{(P1)}\ \mathit{secat}^{\mathbf{Top}^{Q}}(f) = \mathbf{secat}(f)?$$

Contraejemplo

$$\text{(P1)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = \mathbf{secat}(f)?$$
$$\text{(P2)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = secat^{\mathbf{Top}^S}(f)?$$

Contraejemplo

$$\text{(P1)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = \mathbf{secat}(f)?$$

$$\text{(P2)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = secat^{\mathbf{Top}^S}(f)?$$

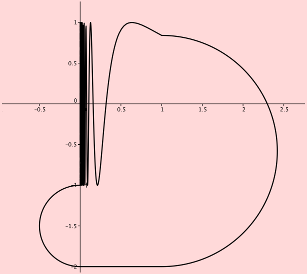
NO!

Contraejemplo

$$\text{(P1)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = \mathbf{secat}(f)?$$
$$\text{(P2)}\ secat^{\mathbf{Top}^Q}(f) = secat^{\mathbf{Top}^S}(f)?$$

NO!

Contraejemplo (M-Murillo 2016)



W tiene las siguientes propiedades:

- es débilmente equivalente a un punto;
- no es homotópicamente equivalente a un punto;
- es compacto.

Entonces:

$$secat^S(* \to W) \geq 1 \neq 0 = secat^Q(* \to W).$$

Tabla de Contenidos

Categoría de Modelos Mixta

Teorema (Cole 2006)

La categoría **Top** es una *categoría de modelos propia* con la siguiente estructura:

- *Fibraciones* = fibraciones de Hurewicz.
- *Equivalencias débiles* = equivalencias de homotopía débiles.
- *Cofibraciones* = todos los morfismos que tienen la *LLP* respecto a las fibraciones triviales.
- *Objectos cofibrantes* = espacios del tipo de homotopía de un CW-complejo.

El Teorema Principal

Teorema (M-Murillo 2016)

Sean X y Y dos espacios topológicos del tipo de homotopía de CW-Complejos y sea f una aplicación entre ellos. Entonces, la siguiente igualdad es cierta:

$$secat^{\mathbf{Top}^S}(f) = secat^{\mathbf{Top}^M}(f) = secat^{\mathbf{Top}^Q}(f).$$

El Teorema Principal

Teorema (M-Murillo 2016)

Sean X y Y dos espacios topológicos del tipo de homotopía de CW-Complejos y sea f una aplicación entre ellos. Entonces, la siguiente igualdad es cierta:

$$secat^{\mathbf{Top}^S}(f) = secat^{\mathbf{Top}^M}(f) = secat^{\mathbf{Top}^Q}(f).$$

En particular, si f es una fibración de Hurewicz y el espacio base es paracompacto:

$$\mathbf{secat}(f) = secat^S(f) = secat^M(f) = secat^Q.$$

El Teorema Principal

Teorema (M-Murillo 2016)

Sean X y Y dos espacios topológicos del tipo de homotopía de CW-Complejos y sea f una aplicación entre ellos. Entonces, la siguiente igualdad es cierta:

$$secat^{\mathbf{Top}^S}(f) = secat^{\mathbf{Top}^M}(f) = secat^{\mathbf{Top}^Q}(f).$$

En particular, si f es una fibración de Hurewicz y el espacio base es paracompacto:

$$\mathbf{secat}(f) = secat^S(f) = secat^M(f) = secat^Q.$$

Corolario (M-Murillo 2016)

Bajo las mismas hipótesis: $\mathbf{secat}(f) = secat^{\mathbf{sSet}}(f)$.

Idea de la Prueba

- Si los espacios X, Y y Z son del tipo de homotopía de un CW-complejo, el join en la estructura de modelos de Strøm es el mismo que el join en la estructura de modelos mixta (salvo equivalencia débil).

Idea de la Prueba

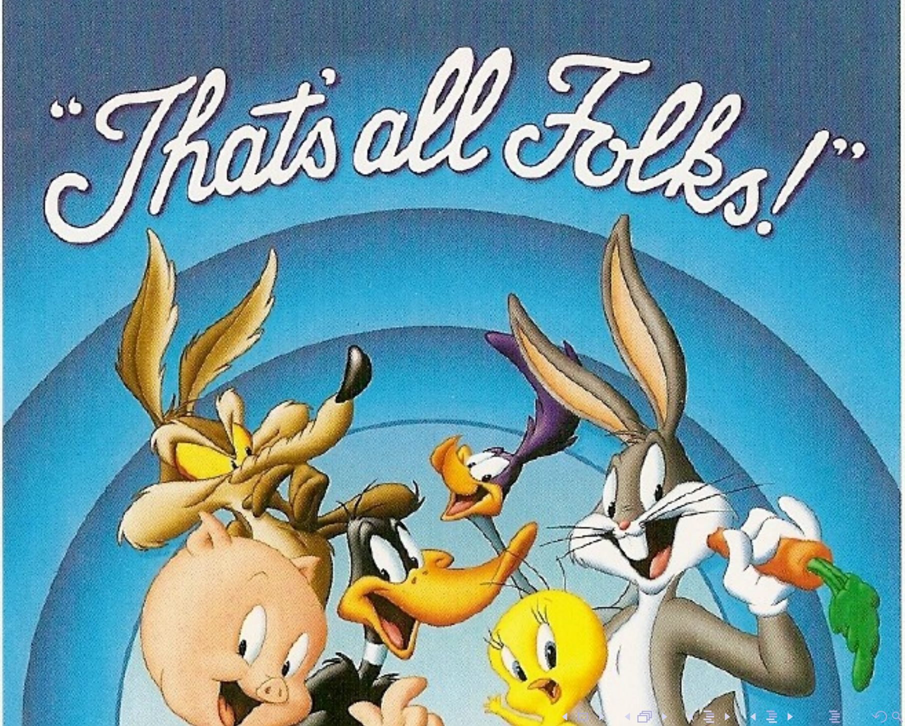
- Si los espacios X, Y y Z son del tipo de homotopía de un CW-complejo, el join en la estructura de modelos de Strøm es el mismo que el join en la estructura de modelos mixta (salvo equivalencia débil).
- Bajo las mismas hipóthesis, el morfismo join admite una seccion débil en la estructura de Strøm si y solo si la admite en la mixta.

Idea de la Prueba

- Si los espacios X, Y y Z son del tipo de homotopía de un CW-complejo, el join en la estructura de modelos de Strøm es el mismo que el join en la estructura de modelos mixta (salvo equivalencia débil).
- Bajo las mismas hipóthesis, el morfismo join admite una seccion débil en la estructura de Strøm si y solo si la admite en la mixta.
- $Id\colon \mathbf{Top}^M \leftrightarrows \mathbf{Top}^Q\colon Id$ es una *buena* adjunción.

Bibliografía

- Cole, M. (2006). *Mixing model structures*. Topology and Its Applications.
- Díaz Díaz, F. , García Calcines, J.M. , García Díaz, P.R. , Murillo Mas, A. and Remedios Gómez, J. (2012). *Abstract sectional category*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin.
- Doeraene, J.P. (1993). *L.S.-category in a model category*. Journal of Pure and Applied Algebra.
- Moraschini, M., Murillo, A. (2016). *Abstract sectional category in model structures on topological spaces*. Topology and Its Applications.


"That's all Folks!"