Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 6 - 9/4/2014

1 Polinomi

I polinomi in Octave sono definiti mediante il vettore dei loro coefficienti: se `p` è un array di dimensione $1 \times m$, esso identifica il seguente polinomio nella variabile x di grado al più $m-1$

$$\texttt{p(1)}x^{m-1} + \texttt{p(2)}x^{m-2} + \cdots + \texttt{p(m-1)}x + \texttt{p(m)}.$$

Le funzioni `poly`, `roots`, `polyval`, `polyvalm`, `polyder`, `conv`, `deconv` permettono di eseguire facilmente alcune operazioni con e sui polinomi. Al sito `http://sunsite.univie.ac.at/textbooks/octave/octave_25.html#SEC160` sono elencate le function di Octave che permettono di effettuare operazioni con polinomi.

Ad esempio, valutiamo il polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$ in $x = 6.7$:

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> octave:3> polyval(p, 6.7)
ans =  37.190
```

Ora calcoliamo gli zeri del polinomio

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> z=roots(p)
z =

  -0.61803
   1.61803
```

Verifichiamo che quelli calcolati siano gli zeri:

```
octave:5> polyval(p,z)
ans =

  -1.1102e-16
   2.2204e-16
```

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico $p(x)$. Verifichiamolo utilizzando l'istruzione `poly`:

```
octave:9> A=[0 1; 1 1];
octave:10> pc=poly(A)
pc =

   1.0000   -1.0000   -1.0000
```

Secondo il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio caratteristico calcolato in A vale zero. Verifichiamolo:

```
octave:11> polyvalm(pc,A)
ans =

   9.2057e-17   1.4895e-16
   1.4895e-16   2.4101e-16
```

I polinomi possono essere moltiplicati e divisi mediante le istruzioni `conv` e `deconv`. Ad esempio dividiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ per $x - 2$, e poi ricostruiamo il polinomio iniziale:

```
octave:12> g=[1 -6 12 -8];
octave:13> h=[1 -2];
octave:14> [q,r]=deconv(g,h)
q =

   1  -4   4

r =

   0   0   0   0

octave:15> conv(h,q)
ans =

    1   -6   12   -8
```

Per tracciare il grafico di un polinomio in un intervallo $[a, b]$ possiamo valutare il polinomio in una discretizzazione dell'intervallo, e fare il `plot` dei risultati ottenuti. Ad esempio, vogliamo disegnare il polinomio $p(x) = x^4 + -9x^3 + 21x^2 + x - 30$ nell'intervallo $[-2, 6]$:

```
octave:24> p =[ 1  -9  21  1  -30];
octave:25> x=linspace(-2, 6, 50);
octave:26> y=polyval(p,x);
octave:27> plot(x,y)
```

Esercizio 1. Si scriva una function che, preso come input un vettore `p` con i coefficienti di un polinomio, un numero reale `t`, e un numero intero `n`, disegna sul piano complesso gli zeri dei polinomi ottenuti sommando `h·t` al coefficiente costante del polinomio iniziale, per `h=0,...,n`. Si provino i seguenti esempi:

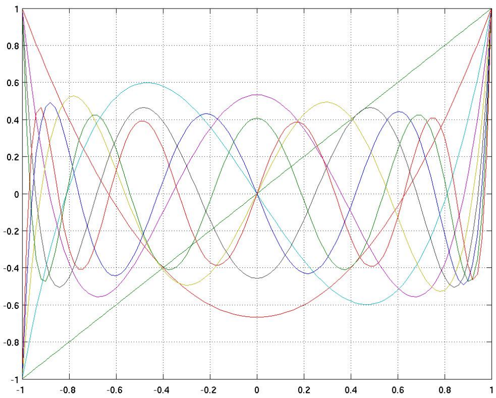
1. il polinomio $x^4 - 1$, $t = 0.05, n = 20$.
2. il polinomio $(x - 1)^4$, $t = 0.02, n = 40$.
3. il polinomio i cui zeri sono $1, 2, 3, \ldots, 20$, $t = 0.05, n = 20$

Esercizio 2 (Polinomi di Legendre). I polinomi di Legendre sono definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = ((2n-1)xp_{n-1}(x) - (n-1)p_{n-2}(x))/n, \quad n \geq 3,$$

dove $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_n(x)$ è l'n-esimo polinomio di Legendre. Si disegni il grafico dei primi K polinomi di Legendre nell'intervallo $[-1, 1]$, dove $K > 1$ è un intero assegnato.

Per $K = 10$ dovreste ottenere la figura



Esercizio 3 (Polinomi di Chebyshev). Si modifichi la function precedente per disegnare il grafico in $[-1, 1]$ dei primi K polinomi di Chebyshev, definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = 2xp_{n-1}(x) - p_{n-2}(x), \quad n \geq 3,$$

dove $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_n(x)$ è l'n-esimo polinomio di Chebyshev.

2 Iterazione di Graeffe

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n e si consideri il polinomio $q(x) = p(x)p(-x)$. Si osservi che $q(x)$ ha grado $2n$ e che i coefficienti delle potenze di grado dispari del polinomio $q(x)$ sono nulli. Questo fatto può essere anche verificato sperimentalmente:

```
octave:12> p=[1 -6 12 -8];
octave:13> degree=size(p,2)-1;
octave:14> pminus=p;
octave:15> pminus(end:-1:1)=p(end:-1:1).*((-1).^[0:degree])
pminus =

   -1   -6   -12   -8

octave:12> q=conv(p,pminus)

q =

   -1    0    12    0   -48    0   64
```

Pertanto $q(x)$ può essere visto come un polinomio $p_1(x)$ di grado ancora n valutato in x^2, cioè $q(x) = p_1(x^2)$.

È dunque possibile generare una successione $\{p_i(x)\}_i$ di polinomi di grado n mediante la formula ricorsiva :

$$p_{i+1}(x^2) = p_i(x)p_i(-x)/r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

dove r_i è il massimo modulo dei coefficienti di $p_i(x)p_i(-x)$, e $p_0(x) = p(x)$. In altre parole, a meno della divisione per r_i, i coefficienti di $p_{i+1}(x)$ sono i coefficienti delle potenze pari di $p_i(x)p_i(-x)$. La divisione per r_i ha lo scopo di non far divergere i coefficienti dei polinomi.

La successione di polinomi ha le seguenti proprietà:

1. Se $p(x)$ ha s radici di modulo minore di 1 e $n-s$ radici di modulo maggiore di 1, la successione converge al polinomio x^s.

2. Se $p(x)$ ha almeno una radice di modulo 1, la successione può non convergere.

Esercizio 4. Si scriva una function che prende in input i coefficienti di un polinomio $p(x)$ e un intero positivo K, e che restituisce in output una matrice W di dimensione $(K+1) \times (n+1)$ la cui riga i-esima contiene i coefficienti del polinomio $p_i(z)$, per $i = 0, \dots, K$.

Si verifichino sperimentalmente le proprietà teoriche di convergenza della successione, dando in input i coefficienti di polinomi con radici opportunamente scelte.

3 Esercizi da inviare al docente

Inviare per e-mail, con subject “LDMC: lezione 6, [cognome nome]”:

1. La function scritta per svolgere l’esercizio 3.

2. La function scritta per svolgere l’esercizio 4 e la matrice W che si ottiene dopo 10 iterazioni, a partire dal polinomio $p(x)$ con radici 0.3, -0.5, 6, 10.