

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 6 - 24/4/2013

## 1 Polinomi

I polinomi in Octave sono definiti mediante il vettore dei loro coefficienti: se  $\mathbf{p}$  è un array di dimensione  $1 \times m$ , esso identifica il seguente polinomio nella variabile  $x$  di grado al più  $m - 1$

$$\mathbf{p}(1)x^{m-1} + \mathbf{p}(2)x^{m-2} + \dots + \mathbf{p}(m-1)x + \mathbf{p}(m).$$

Le funzioni `poly`, `roots`, `polyval`, `polyvalm`, `polyder`, `conv`, `deconv` permettono di eseguire facilmente alcune operazioni con e sui polinomi. Al sito [http://sunsite.univie.ac.at/textbooks/octave/octave\\_25.html#SEC160](http://sunsite.univie.ac.at/textbooks/octave/octave_25.html#SEC160) sono elencate le function di Octave che permettono di effettuare operazioni con polinomi.

Ad esempio, valutiamo il polinomio  $p(x) = x^2 - x - 1$  in  $x = 6.7$ :

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> octave:3> polyval(p, 6.7)
ans = 37.190
```

Ora calcoliamo gli zeri del polinomio

```
octave:3> p=[1 -1 -1];
octave:4> z=roots(p)
z =
-0.61803
 1.61803
```

Verifichiamo che quelli calcolati siano gli zeri:

```
octave:5> polyval(p, z)
ans =
-1.1102e-16
 2.2204e-16
```

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico  $p(x)$ . Verifichiamolo utilizzando l'istruzione `poly`:

```

octave:9> A=[0 1; 1 1];
octave:10> pc=poly(A)
pc =
    1.0000   -1.0000   -1.0000

```

Secondo il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio caratteristico calcolato in  $A$  vale zero. Verifichiamolo:

```

octave:11> polyvalm(pc,A)
ans =
    9.2057e-17    1.4895e-16
    1.4895e-16    2.4101e-16

```

I polinomi possono essere moltiplicati e divisi mediante le istruzioni `conv` e `deconv`. Ad esempio dividiamo il polinomio  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  per  $x - 2$ , e poi ricostruiamo il polinomio iniziale:

```

octave:12> g=[1 -6 12 -8];
octave:13> h=[1 -2];
octave:14> [q,r]=deconv(g,h)
q =
    1   -4    4
r =
    0    0    0    0
octave:15> conv(h,q)
ans =
    1   -6   12   -8

```

Per tracciare il grafico di un polinomio in un intervallo  $[a, b]$  possiamo valutare il polinomio in una discretizzazione dell'intervallo, e fare il `plot` dei risultati ottenuti. Ad esempio, vogliamo disegnare il polinomio  $p(x) = x^4 + -9x^3 + 21x^2 + x - 30$  nell'intervallo  $[-2, 6]$ :

```

octave:24> p=[ 1 -9 21 1 -30];
octave:25> x=linspace(-2, 6, 50);
octave:26> y=polyval(p,x);
octave:27> plot(x,y)

```

*Esercizio 1.* Si scriva una function che, preso come input un vettore  $p$  con i coefficienti di un polinomio, un numero reale  $t$ , e un numero intero  $n$ , disegna sul piano complesso gli zeri dei polinomi ottenuti sommando  $h \cdot t$  al coefficiente costante del polinomio iniziale, per  $h=0, \dots, n$ . Si provino i seguenti esempi:

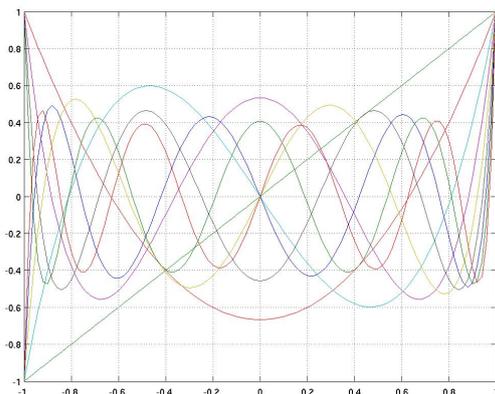
1. il polinomio  $x^4 - 1$ ,  $t = 0.05$ ,  $n = 20$ .
2. il polinomio  $(x - 1)^4$ ,  $t = 0.02$ ,  $n = 40$ .
3. il polinomio i cui zeri sono  $1, 2, 3, \dots, 20$ ,  $t = 0.05$ ,  $n = 20$

*Esercizio 2* (Polinomi di Legendre). I polinomi di Legendre sono definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = ((2n - 1)xp_{n-1}(x) - (n - 1)p_{n-2}(x))/n, \quad n \geq 3,$$

dove  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  e  $p_n(x)$  è l' $n$ -esimo polinomio di Legendre. Si disegni il grafico dei primi  $K$  polinomi di Legendre nell'intervallo  $[-1, 1]$ , dove  $K > 1$  è un intero assegnato.

Per  $K = 10$  dovreste ottenere la figura



*Esercizio 3* (Polinomi di Chebyshev). Si modifichi la function precedente per disegnare il grafico in  $[-1, 1]$  dei primi  $K$  polinomi di Chebyshev, definiti mediante la ricorsione

$$p_n(x) = 2xp_{n-1}(x) - p_{n-2}(x), \quad n \geq 3,$$

dove  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  e  $p_n(x)$  è l' $n$ -esimo polinomio di Chebyshev.

*Esercizio 4.* Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si osservi che i coefficienti delle potenze di grado dispari del polinomio  $p(x)p(-x)$  sono nulli. Pertanto  $p(x)p(-x)$  può essere visto come un polinomio di grado ancora  $n$  valutato in  $x^2$ . È dunque possibile generare una successione  $\{p_i(x)\}_i$  di polinomi di grado  $n$  mediante la formula ricorsiva :

$$p_{i+1}(x^2) = p_i(x)p_i(-x)/r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

dove  $r_i$  è il massimo modulo dei coefficienti di  $p_i(x)p_i(-x)$ , e  $p_0(x) = p(x)$ . In altre parole, a meno della divisione per  $r_i$ , i coefficienti di  $p_{i+1}(x)$  sono i coefficienti delle potenze pari di  $p_i(x)p_i(-x)$ . La divisione per  $r_i$  ha lo scopo di non far divergere i coefficienti dei polinomi.

La successione di polinomi ha le seguenti proprietà:

1. Se  $p(x)$  ha  $s$  radici di modulo minore di 1 e  $n-s$  radici di modulo maggiore di 1, la successione converge al polinomio  $x^s$ .
2. Se  $p(x)$  ha radici di modulo uguali 1, la successione può non convergere.

Si scriva una function che genera i vettori di dimensione  $n+1$  che definiscono i coefficienti dei polinomi  $p_i(x)$ , per  $i = 1, \dots, K$ , dove  $K > 1$  è un intero fissato (usare `conv` per moltiplicare i polinomi).

Si verifichino sperimentalmente le proprietà teoriche della successione.

## 2 Esercizi da inviare al docente

Inviare per e-mail, con subject "LDMC: cognome/nome":

1. La function scritta per svolgere l'esercizio 3.
2. La function scritta per svolgere l'esercizio 4 e i coefficienti del polinomio che si ottengono dopo 10 iterazioni, ottenute a partire dal polinomio  $p(x)$  con radici 0.3, -0.5, 6, 10.