

ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2024/25 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 28 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su \mathbb{R} . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Siano \mathcal{A} e \mathcal{A}' due atlanti lisci su una varietà topologica M . Mostra che sono fatti equivalenti:

- (1) \mathcal{A} e \mathcal{A}' sono compatibili
- (2) per ogni aperto $U \subset M$, le restrizioni $\mathcal{A}|_U$ e $\mathcal{A}'|_U$ sono compatibili
- (3) ogni $x \in M$ ha un intorno $U = U(x)$ su cui $\mathcal{A}|_U$ e $\mathcal{A}'|_U$ sono compatibili

Esercizio 1.3. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M . Mostra che un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.4. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di \mathbb{R}^n di dimensione k . Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\text{Grass}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua giacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z), \\ h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà \mathbb{R}^3/Γ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \frac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \rightarrow M/\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente M/Γ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^2 , ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.7. Mostra che la funzione costruita a lezione $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è un diffeomorfismo.

2. Esercizi del 7 marzo

Esercizio 2.1. Sia $f: \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Esercizio 2.3. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.4. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva ma non un embedding. Mostra che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.5. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \rightarrow \mathbb{R}^k$ per nessun k .

Esercizio 2.6. Mostra che per ogni varietà liscia M esiste una funzione propria $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

Esercizio 2.7. Siano $S_0, S_1 \subset M$ due chiusi disgiunti in una varietà liscia M . Mostra che esiste una funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(S_i) = i$ per $i = 0, 1$ e $f(x) \in (0, 1)$ per ogni $x \in M \setminus (S_0 \cup S_1)$.

3. Esercizi del 14 marzo

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione n . Un elemento di $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^* .

Esercizio 3.1. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

- (1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.

(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.2. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1 .

Esercizio 3.3. Siano v_1, \dots, v_n base di V e v^1, \dots, v^n base duale di V^* . Mostra il fatto seguente enunciato a lezione: una base per $\Lambda^k(V)$ è data dagli elementi

$$v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}$$

con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Esercizio 3.4. Siano $v^1, \dots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge*.

Esercizio 3.5. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.6. Sia \langle, \rangle un prodotto scalare su V . Mostra che esiste un unico prodotto scalare \langle, \rangle su $\Lambda^k(V)$ tale che

$$\langle v^1 \wedge \dots \wedge v^k, w^1 \wedge \dots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^k \in V^*$. Qui $\det \langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che se il prodotto \langle, \rangle su V è definito positivo allora anche quello indotto su $\Lambda^k(V)$ lo è.

Esercizio 3.7. Sia V dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = 1.$$

L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa $*$ è ben definita.
- (2) Se v^1, \dots, v^n è una base positiva ortonormale per V^* , allora

$$*(v^1 \wedge \dots \wedge v^k) = v^{k+1} \wedge \dots \wedge v^n.$$

- (3) La mappa $*$ è una isometria.
- (4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

4. Esercizi del 21 marzo

Esercizio 4.1. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in \mathbb{R}^{n+1} . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.4. Siano X, Y due campi vettoriali in un aperto di \mathbb{R}^n . Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Esercizio 4.5. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 4.6. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su \mathbb{R}^n dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 4.7. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

5. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 5.1. Mostra che una distribuzione D di rango 1 in una varietà M è sempre integrabile.

Esercizio 5.2. Sia M varietà dotata di una struttura Riemanniana g , cioè g è un campo tensoriale $(0, 2)$ su TM simmetrico e definito positivo ovunque. Se una distribuzione D è integrabile, la distribuzione ortogonale D^\perp è sempre integrabile? La distribuzione ortogonale è definita in modo ovvio come $(D^\perp)_p = (D_p)^\perp$ per ogni p . (Se la risposta è sì dimostrarlo, se è no esibisci un controesempio.)

Esercizio 5.3. Siano X, Y campi vettoriali in una varietà M . Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$. Il bracket $[A, B]$ di due operatori A, B è per definizione $[A, B] = AB - BA$. Qui \mathcal{L}_X è la derivata di Lie lungo X . Nota che se $(h, k) = (1, 0)$ questo è equivalente all'identità di Jacobi sui campi vettoriali. Questa uguaglianza può essere enunciata dicendo che la derivata di Lie fornisce un omomorfismo di algebre di Lie da $\mathfrak{X}(M)$ nell'algebra di Lie degli operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$.

Esercizio 5.4. Considera su \mathbb{R}^3 , con coordinate (x_1, x_2, x_3) , una generica distribuzione di piani

$$D_x = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}.$$

Considera il campo $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \text{rot}X = 0$$

in ogni punto. Qui $\text{rot}X$ indica il rotore di X .

Esercizio 5.5. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $SO(3)$ sono l'identità, $SO(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 5.6. Mostra che le classi di coniugio di quaternioni non reali formano una foliazione in sfere di $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$.

Esercizio 5.7. Sia $T_{12} < SO(3)$ il sottogruppo delle isometrie che preservano l'orientazione di un tetraedro regolare fissato in \mathbb{R}^3 con baricentro nell'origine. La controimmagine $T_{24}^* < S^3$ attraverso il rivestimento doppio $S^3 \rightarrow SO(3)$ è un sottogruppo di ordine 24 detto *gruppo tetraedrale binario*. Mostra che l'involuppo convesso di T_{24}^* in $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ è un politopo regolare in \mathbb{R}^4 , detto *24-celle*. Descrivi le 24 facce di questo politopo (il 24-celle è l'unico politopo regolare *autoduale* in ogni dimensione n che non sia un simpleso: ha tante facce quanti vertici).

Mostra che l'azione del sottogruppo T_{24}^* su S^3 per moltiplicazione a sinistra è libera e propriamente discontinua, quindi S^3/T_{24}^* è una 3-varietà. Sai individuare un dominio fondamentale per l'azione di T_{24}^* su S^3 ?

(In modo simile ma più complicato la controimmagine del gruppo I_{60} delle isometrie che preservano l'orientazione di un icosaedro o dodecaedro è un gruppo I_{120}^* di ordine 120 il cui involuppo convesso è il politopo regolare chiamato *600-celle*. Inoltre I_{120}^* è un gruppo perfetto, ed il quoziente S^3/I_{120}^* è una 3-varietà con gruppo fondamentale finito I_{120}^* perfetto, nota come *sfera di Poincaré*.)

6. Esercizi del 4 aprile

Esercizio 6.1. Mostra che una n -varietà M è orientabile \iff esiste una n -forma mai nulla su M .

Esercizio 6.2. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 6.3. Sia $\varphi: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e \wedge . \square

Esercizio 6.4. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su una varietà M senza bordo. Supponiamo che ω sia chiusa (cioè $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p): T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M .

Esercizio 6.5. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile \iff per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Una *forma simplettica* su una varietà N è una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ che è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e *non-degenere*, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ esiste $w \in T_pM$ tale che $\omega(p)(v, w) \neq 0$.

Esercizio 6.6. Mostra i fatti seguenti:

- (1) Se ω è una forma simplettica su N , allora N ha dimensione pari.
- (2) Costruisci una forma simplettica su \mathbb{R}^{2n} e sul toro $2n$ -dimensionale.

- (3) Sia $\pi: T^*M \rightarrow M$ il fibrato cotangente di una varietà M di dimensione n . Nota che T^*M è una varietà di dimensione $2n$. La *1-forma tautologica* $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ sulla varietà T^*M è definita nel modo seguente: un punto $\alpha \in T^*M$ è per definizione un funzionale $\alpha: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ con $p = \pi(\alpha)$. Sia $v \in T_\alpha(T^*M)$. Poniamo

$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Mostra che $d\theta$ è una forma simplettica su T^*M .

- (4) Mostra che se ω è una forma simplettica su N allora esiste un'orientazione su N per cui $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ è una forma volume.

Esercizio 6.7. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.