ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17

COMPITO 5 SETTEMBRE 2017

Esercizio 1 (8 punti)**.** Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x, y + 1, z), \qquad g(x, y, z) = (x, y, z + 1),$$
$$h(x, y, z) = (x + 1, -y, -z).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro $S^1 \times S^1 \times S^1$. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio omeomorfo al 3-toro.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Costruisci due atlanti su $\mathbb{R}$ non compatibili. Determina se le due varietà lisce che ottieni sono diffeomorfe tra loro.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Siano r_1, r_2, r_3 tre rette nel piano proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ con intersezione vuota $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$.

(1) Calcola i gruppi di coomologia di De Rham della varietà liscia $X = \mathbb{CP}^2 \setminus (r_1 \cup r_2 \cup r_3)$.
(2) Dimostra che esiste una mappa $f : X \to X$ tale che $f^* : H^*(X) \to H^*(X)$ non sia né l'identità né banale.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

(1) Calcola i simboli di Christoffel di questa varietà riemanniana.
(2) Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Mostra che v_t fa un angolo t con l'asse delle ordinate. Deduci che γ non è una geodetica.