Geometria iperbolica - Esercizi III

Antonio De Capua

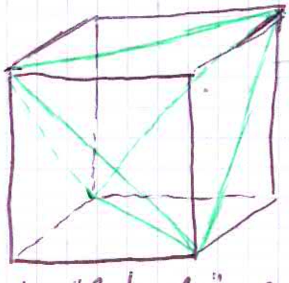
Esercizio 1

Dimostrerò che in $\mathbb{H}^2$ c'è un quadrilatero regolare con lati geodetici ed angoli interni pari a $\pi/4$. Identificando i suoi lati nel modo usuale tramite isometrie, si ottiene una metrica iperbolica sul toro che si estende anche al meridiano e al parallelo provenienti dai lati del quadrilatero (in quanto erano geodetici). L'unico punto singolare per tale metrica è quello in cui sono stati identificati i vertici del quadrilatero: in tale punto la metrica avrà una singolarità conica pari all'ampiezza totale degli angoli che ho "affiancato", cioè π.

Per dimostrare l'esistenza di un ~~quadrato~~ quadrilatero come desiderato, procediamo nel modo standard. Fissato un $x_0 \in \mathbb{H}^2$, prendiamo in $T_{x_0}\mathbb{H}^2$ quattro vettori $v_1, \dots, v_4$ t.c. $\{v_1, v_2\}$ sia una base ortonormale, $v_3 = -v_1$, $v_4 = -v_2$.
Detta $\gamma_i(t)$ la geodetica di $\mathbb{H}^2$ che parte da x_0 con velocità v_i, sia $Q(t)$ l'inviluppo convesso di $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t)$. Allora, per ogni $t>0$, $Q(t)$ è un quadrilatero regolare tale che $\lim_{t\to 0}(\text{angoli interni di } Q(t)) = \pi/2$; e $\lim_{t\to+\infty}(\text{angoli interni di } Q(t)) = 0$. Ma allora $\exists\, t_0 > 0$ t.c. gli angoli interni di $Q(t_0)$ siano ampi $\pi/4$.

Esercizio 2

Posso decomporre un cubo in 5 tetraedri in questo modo:



Vale a dire, 4 tetraedri "laterali" che condividono 3 spigoli concorrenti con il cubo; e 1 tetraedro "centrale".
Usando la formula generale per solidi platonici, trovo che l'angolo diedrale del cubo ideale regolare in $\mathbb{H}^3$ è $\vartheta(-\infty) = \frac{n-2}{n}\pi$ dove n è il numero di facce che concorrono in un vertice, in questo caso $n=3$ $\Rightarrow$ l'angolo diedrale è $\frac{\pi}{3}$, uguale a quello del tetraedro ideale regolare.

Poniamoci ora per comodità nel modello della palla di Poincaré per $\mathbb{H}^3$, e supponiamo di stare prendendo come cubo ideale regolare quello che ha per vertici $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in \partial D^3$. Allora le rotazioni di angolo multiplo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad uno degli assi coordinati (di $\mathbb{R}^3$) sono delle

delle isometrie di $\mathbb{H}^3$ che portano tale cubo in sé. Inoltre, ~~componendole~~ se selezioniamo due spigoli del tetraedro "centrale" nella suddivisione di sopra, esiste sempre una composizione di tali isometrie che porta tale tetraedro in sé e uno spigolo nell'altro. Ma allora gli angoli diedrali nei vari spigoli del tetraedro sono tutti uguali $\Rightarrow$ tale tetraedro ideale è regolare.
Per quanto riguarda i tetraedri ideali "laterali" di tale decomposizione: ognuno di tali tetraedri ha 3 spigoli concorrenti che sono ~~...~~ anche spigoli del cubo, perciò in ciascuno di essi vi è un angolo diedrale di $\frac{\pi}{3}$. Per quanto riguarda gli altri 3 spigoli, per proprietà dei tetraedri ideali in $\mathbb{H}^3$ in ognuno di loro vi è un angolo diedrale uguale a quello di uno dei 3 spigoli di cui sopra, quindi uguale a $\frac{\pi}{3}$. Ragion per cui anche questi 4 tetraedri ideali sono regolari.

Esercizio 3

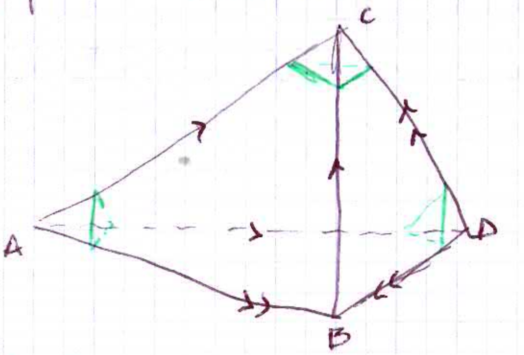
Partiamo dal metodo visto a lezione per incollare due tetraedri ideali, quozientando ogni faccia dell'uno con una faccia dell'altro

(identifico le coppie di facce ~~identificando opposte~~ nell'unico modo che consente di sovrapporre coerentemente le configurazioni delle frecce nei lati delle facce). Da tale incollamento si ottiene una 3-varietà iperbolica M, in quanto tutti gli spigoli segnati con $\rightarrow$ vengono a coincidere e lo stesso per quelli segnati con $\twoheadrightarrow$, e attorno ad entrambi viene a crearsi un "angolo diedrale" ampio π.
L'unione disgiunta dei due tetraedri ideali che stiamo considerando è una varietà iperbolica di cui esiste un'unica isometria $\tilde{\varphi}$ che scambia le due componenti portando gli spigoli $\rightarrow$ negli spigoli $\twoheadrightarrow$ (con orientazione) e viceversa (a livello "combinatorio", tale isometria non è altro che la riflessione rispetto ad un piano verticale a uguale distanza dai due tetraedri nel disegno di sopra). Vale $\tilde{\varphi}^2 = id$.

Tale isometria preserva le coppie di facce che devono essere incollate, perciò ~~...~~ induce al quoziente un'isometria della varietà M. Tale isometria, che denotiamo φ, non può avere punti fissi: i punti che provenivano dagli interni dei tetraedri vengono ovviamente spostati, e quelli che provenivano dalle facce anche, perché l'isometria $\tilde{\varphi}$, per definizione, non fissa nessuna delle coppie di facce che incollo. [Lo stesso vale per gli spigoli]
Viene da sé che $N := M/\{id, \varphi\}$ è allora ancora una varietà

iperbolica. Tale varietà può anche essere vista come ottenuta dal tetraedro ABCD identificando coppie di sue facce. Gli spigoli vengono identificati in uno solo, perché l'azione di φ è quella di portare lo spigolo $\rightarrow$ di M nell'altro spigolo $\twoheadrightarrow$. E attorno all'unico spigolo di N la metrica iperbolica è sicuramente estendibile, perché così era per i due spigoli in M.

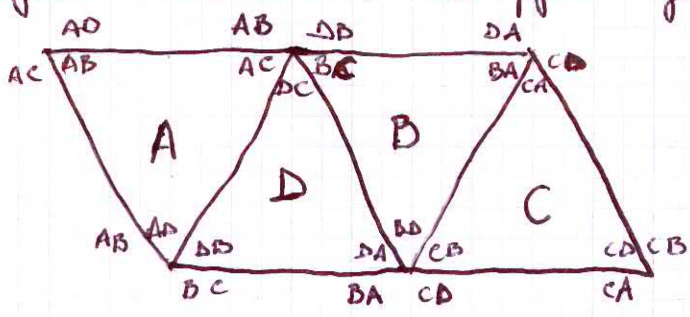
Verifichiamo ora che il link del vertice – è palesemente uno solo – è una bottiglia di Klein: dal tetraedro ABCD rimuovo dei piccoli tetraedri intorno ad ogni vertice. Voglio vedere come, nell'identificazione delle facce di ABCD che dà N, si incollano tra di loro i lati delle nuove facce che ho creato; la superficie risultante sarà il link del vertice.



Per comodità di notazione, chiamo ogni triangolino come il vertice di ABCD che esso rimpiazza; e chiamo ogni vertice di un triangolino come lo spigolo di ABCD su cui esso è posto, usando come prima lettera quella del vertice vicino e come seconda quella del vertice lontano.
Osserviamo che l'identificazione delle facce di ABCD è quella che fa corrispondere

$$\begin{array}{ccc} ABC & & BCD \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ ADB & & DCA \end{array}$$

(dove ho scritto i vertici nell'ordine corretto). Ma allora l'identificazione dei triangolini è come descritto nella figura seguente:



il che vuol dire:
- che al triangolo A incollo le facce in modo da ottenere un nastro di Möbius con bordo ottenuto dal segmento AC-AD. Analogamente dal triangolo C ottengo un nastro di Möbius con bordo ottenuto dal segmento CA-CB.
- I triangoli B e D si incollano a formare un anello, i cui bordi vengono identificati con i bordi dei due nastri di Möbius.

Cioè, l'incollamento dei 4 triangoli è omeomorfo all'incollamento di due nastri di Möbius lungo i bordi, che è una bottiglia di Klein.

Allora la varietà N non può essere orientabile; se lo fosse, lo sarebbe anche la varietà con bordo N' ottenuta ~~identificando~~ dal quoziente di ABCD meno i piccoli tetraedri attorno ai vertici. Ma allora il suo bordo erediterebbe un'orientazione, assurdo perché esso è omeomorfo alla bottiglia di Klein, come appena dimostrato.