Geometria iperbolica

Esercizi III

Matthew Trager

Esercizio 1. Consideriamo un pentagono iperbolico regolare con tutti gli angoli retti: esiste dato che si può costruire un pentagono regolare con angolo interno α per ogni α tale che $0 < \alpha < 3/5\pi$. Incolliamo quindi due copie di questo pentagono lungo i lati come mostrato in Fig. 1.
Otteniamo così un cilindro iperbolico con un punto singolare di angolo conico π. A questo punto è sufficiente incollare le due geodetiche di bordo per ottenere un toro come richiesto.

□

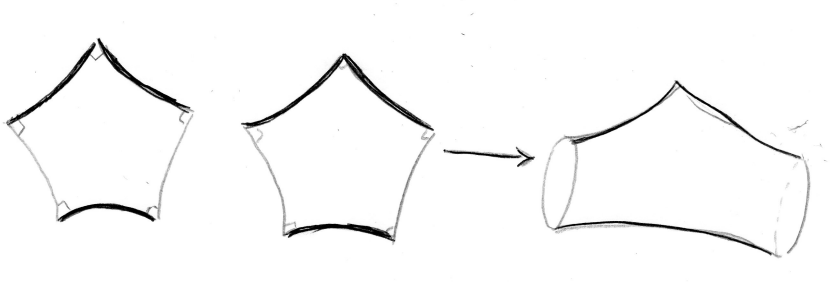

Figura 1.

Esercizio 2. La Fig. 2 mostra come decomporre un cubo in cinque tetraedri: basta considerare un tetraedro regolare avente come spigoli le diagonali delle facce del cubo e il suo complementare che è costituito da quattro tetraedri laterali.
L'angolo diedrale di uno spigolo (e quindi di tutti gli spigoli) di un cubo regolare ideale è $\pi/3$, cioè l'angolo interno di un triangolo regolare euclideo: infatti intersecando il cubo con una piccola orosfera centrata nel vertice, che sarà ortogonale agli spigoli, si ottiene un triangolo regolare euclideo.
Osserviamo quindi che nella decomposizione in cinque tetraedri del cubo, il tetraedro centrale è sempre regolare per ragioni di simmetria, mentre i quattro tetraedri laterali hanno angoli diedrali intorno agli spigoli del cubo che per quanto appena visto sono tutti pari a $\pi/3$. Questo implica che anche i tetraedri laterali sono regolari. □

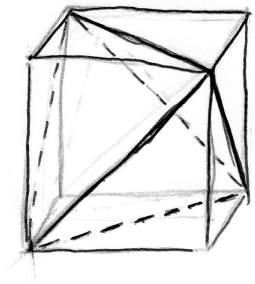

Figura 2.

Esercizio 3. Numeriamo i vertici ideali del tetraedro da 1 a 4 (la scelta non è importante dato che il gruppo di simmetrie è S_4). Incolliamo quindi le facce a coppie

$$(1,2,3) \leftrightarrow (1,3,4)$$
$$(2,3,4) \leftrightarrow (1,2,4)$$

con l'identificazione data dall'unica isometria che manda i tre vertici di una faccia nei tre vertici dell'altra (ordinati come sopra): l'incollamento produce uno spazio topologico con una struttura di varietà iperbolica sui complementari degli spigoli. Osserviamo però che le isometrie identificano tra loro i 6 spigoli: questo significa l'unica equazione di compatibilità è $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 = 1$ e dato che $z_i = e^{i\pi/6}$ (poiché il tetraedro è regolare) questa relazione è soddisfatta.
Infine osserviamo che il link sul vertice è una bottiglia di Klein (discussione fatta a ricevimento).

□

Figura 3: Le isometrie identificano tutti i sei spigoli (sinistra). Il link è una superficie non orientabile con caratteristica di Eulero 0, quindi è una bottiglia di Klein (destra).

Esercizio 4. È possibile suddividere il dodecaedro iperbolico in 120 "ortotetraedri" con angoli diedrali calcolabili. Quindi si usa la formula per il volume di un ortotetraedro. (Discussione fatta a ricevimento...)

□

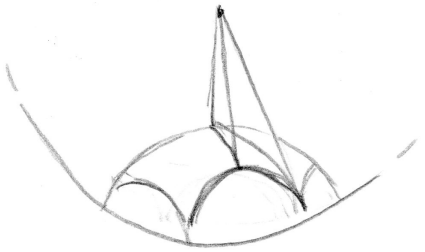

Figura 4: L'ortotetraedro di cui si calcola il volume.