

Geometria iperbolica

Esercizi I

Matthew Trager

Esercizio 1. Mostriamo che $1 \Leftrightarrow 2$ e $2 \Leftrightarrow 3$.

$1 \Rightarrow 2$ In generale si ha che ogni insieme compatto in uno spazio metrico deve essere chiuso e limitato. Mostriamo quindi che se la varietà M è completa, ogni suo sottoinsieme chiuso e limitato è compatto.

Ricordiamo che in uno spazio metrico la compattezza equivale alla compattezza per successioni. Sia quindi $K \subseteq M$ un insieme chiuso e limitato e sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$ una successione. È facile osservare che poiché K è limitato, è possibile scegliere una sottosuccessione $\{x_{k_j}\}$ che sia di Cauchy. Infatti se per ogni n , $\mathcal{A}_n$ è un ricoprimento finito di palle di diametro $1/n$ tale che $\mathcal{A}_{n+1}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{A}_n$, allora possiamo scegliere una successione di palle $A_n \in \mathcal{A}_n$ tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$ e tali che A_n contiene infiniti elementi della successione: questi elementi forniscono una successione di Cauchy. A questo punto per la completezza di M questa successione converge a un elemento $\tilde{x}$ e poiché K è chiuso si ha che $\tilde{x} \in K$. Quindi da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione convergente, cioè K è compatto.

$2 \Rightarrow 1$ Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M$ una successione di Cauchy. Allora $\{x_k\}$ è contenuta in un insieme K chiuso e limitato, che per ipotesi è quindi compatto. Da questo segue che possiamo scegliere una sottosuccessione convergente, ma è facile verificare che in realtà tutta la successione converge.

$2 \Rightarrow 3$ Sia $p \in M$, $v \in T_p M$ e σ_v la geodetica data da $\sigma_v = \exp_p(tv)$. Se $[0, t_0)$ il dominio di σ_v , supponiamo $t_0 < \infty$. Allora $\sigma([0, t_0))$ è contenuto in un insieme K chiuso e limitato che è anche compatto: da questo segue l'assurdo perché possiamo sempre estendere σ_v . Infatti K è uniformemente normale (cioè il raggio di iniettività dei punti di K è limitato inferiormente) quindi avvicinandoci a t_0 possiamo estendere la geodetica.

$3 \Rightarrow 2$ Sarà utile il seguente

Lemma *Se vale 3, ogni due punti di M sono collegati da una geodetica.*

Dimostrazione Siano $p, q \in M$ con $d(p, q) = r$. Per ϵ sufficientemente piccolo sia $B_\epsilon(p)$ la palla geodetica di raggio ϵ e supponiamo $q \notin B_\epsilon(p)$. Sia $x_0 \in \partial B_\epsilon(p)$ un punto del bordo in cui la funzione $d(x, q)$ assume il minimo. Se ϵ è piccolo possiamo scrivere $x_0 = \exp_p(\epsilon v)$ per un opportuno $v \in T_p M$ di norma 1. Verifichiamo che vale $\sigma_v(r) = q$.

Definiamo l'insieme

$$A = \{s \in [0, r] \mid d(\sigma_v(s), q) = r - s\}$$

A è chiaramente chiuso e non vuoto ($0 \in A$): è sufficiente mostrare che $\sup A = r$. Sia $s_0 \in A$, con $s_0 < r$. Allora per δ sufficientemente piccolo, se $\tilde{x}$ è similmente a prima un minimo di $d(x, q)$ su $\partial B_\delta(\sigma_v(s_0))$, risulta che $\tilde{x} = \sigma_v(s_0 + \delta)$ e $s_0 + \delta \in A$, infatti:

- poiché $s_0 \in A$, vale $r - s_0 = d(\sigma_v(s_0), q) \leq \delta + d(\tilde{x}, q)$
- se γ è un cammino congiungente $\sigma_v(s_0)$ e q , si osserva facilmente che $L(\gamma) \geq \delta + d(\tilde{x}, q)$
- segue che $d(\tilde{x}, q) = r - (s_0 + \delta)$ e da questo usando la disuguaglianza triangolare si deduce anche che $d(p, \tilde{x}) \geq s_0 + \delta$
- se si considera la curva ottenuta unendo $\sigma_v|_{[0, s_0]}$ con una geodetica radiale da $\sigma_v(s_0)$ a $\tilde{x}$, questa è minimizzante (poiché questa curva è lunga $s_0 + \delta$) ed è quindi una geodetica che coincide con il prolungamento di σ_v : quindi vale $\sigma_v(s_0 + \delta) = \tilde{x}$, da cui $s_0 + \delta \in A$.

Questo conclude la dimostrazione del Lemma (basta scegliere $s_0 = \sup A$).

A questo punto osserviamo che basta provare che le palle chiuse di centro $p \in M$ sono compatte. Ma per il Lemma le palle sono immagine tramite $\exp_p$ di $\overline{B_r(O_p)} \subseteq T_p M$ e questo conclude la dimostrazione.

□

Esercizio 2. Possiamo supporre, a meno di isometria, che x abbia coordinate $(0, 0, 1)$. Sia y il punto di r con coordinata z minima (l'esistenza e unicità di tale punto, evidenti geometricamente, possono essere provate formalmente risolvendo il semplice sistema algebrico che determina il punto). La retta s congiungente x e y risulta essere ortogonale a r : infatti, se v e w sono vettori tangenti a r e s rispettivamente, per ragioni di simmetria risulta $\langle v, w \rangle = \langle -v, w \rangle = -\langle v, w \rangle$ da cui $\langle v, w \rangle = 0$.

Viceversa sia t una retta congiungente x e un punto $z \neq y$ in r . Se per assurdo t e r fossero ortogonali, una riflessione lungo t manderebbe r in sé (oltre a fissare t). D'altra parte il punto $y \in r$ dovrebbe essere fissato, poiché si tratta del punto di distanza minima tra x (che è fisso) e r (infatti i punti più lontani da $(0, 0, 1)$ hanno coordinata z maggiore). Ma allora la retta r conterrebbe due punti fissi, y e z , e sarebbe quindi fissata dalla riflessione: questo è assurdo.

Osservazione Se avessimo lavorato con il modello del semipiano si poteva ottenere la tesi con argomentazioni semplici di geometria euclidea.

□

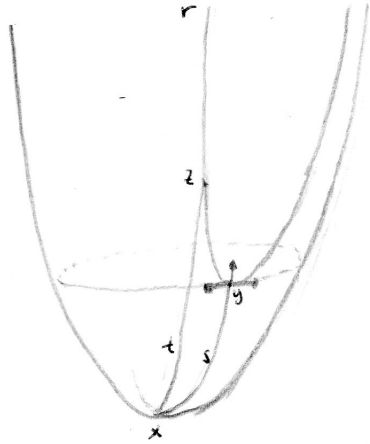


Figura 1: La retta s è ortogonale, la retta t non lo è

Esercizio 3. Osserviamo che possiamo considerare il problema in $I^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Infatti poiché una retta iperbolica è l'intersezione dell'iperboloide con un piano, due rette sono sempre contenute nello spazio vettoriale generato da due piani in $\mathbb{R}^{n+1}$ e l'intersezione di questo spazio vettoriale con l'iperboloide è uno spazio iperbolico di dimensione 2 o 3 (a seconda che i piani si intersechino o meno). A questo punto se sappiamo costruire una isometria che scambia le rette in I^3 , questa può sempre essere estesa a una isometria di tutto I^n : basta completare una base ortogonale dello sottospazio vettoriale (il cui prodotto scalare avrà segnatura $(3, 1)$) a una di $\mathbb{R}^{n+1}$ e estendere l'isometria definendola come l'identità su gli altri elementi della base, ottenendo così un elemento di $O_*(n, 1)$.

Siano π e π' i piani associati alle rette e suddividiamo la dimostrazione in due casi:

1) I piani π e π' si intersecano

Ci basta considerare il problema in I^2 . Sia v l'intersezione tra i piani. Osserviamo con un argomento di continuità che al variare tra i piani contenenti v , ne esiste uno per cui la riflessione (rispetto al prodotto scalare lorentziano: sarà un piano ortogonale a un vettore non isotropo) scambia i piani π e π' e induce quindi un'isometria che scambia le rette iperboliche. Possiamo infatti considerare la suddivisione in semispazi data da π' e osservare che le riflessioni ortogonali a π e π' mandano un vettore qualsiasi $w \in \pi \setminus \pi'$ in semispazi diversi. Esisterà quindi un piano che manda w in π' , ma poiché v è fissato l'immagine di π dovrà essere proprio π' . Infine, avendo effettuato una riflessione, è evidente che viceversa l'immagine di π' è proprio π . (Fig. 2)

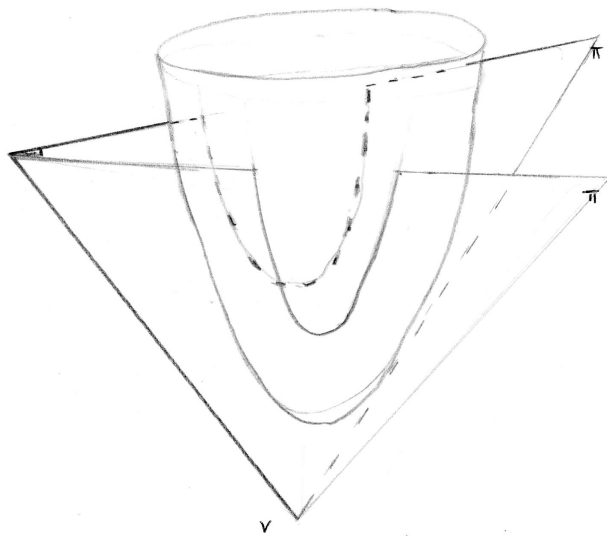


Figura 2: Al variare tra i piani per v che intersecano l'iperboloide (che sono tutti ortogonali a vettori non isotropi) ne esiste uno che scambia π e π' . La figura mostra il caso r e r' ultraparallele (v di tipo spazio).

2) I piani π e π' non si intersecano

Osserviamo che in questo caso possiamo trovare dei punti p e p' in r e r' rispettivamente tali che $d(p, p') = d(r, r') > 0$ (in realtà questo è vero anche se i piani si intersecano in un vettore di tipo tempo). Infatti $d(x, r')$ tende a infinito se muoviamo $x \in r$ verso gli estremi della retta e quindi esiste un punto p di minimo stretto. Chiamiamo quindi m il “punto medio” del segmento pp' (che per costruzione è ortogonale sia a r che a r') e supponiamo, a meno di isometrie, che m abbia coordinate $(0, 0, 0, 1)$. A questo punto la tesi può essere provata con argomenti di simmetria, effettuando opportune isometrie di I^3 della forma $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $M \in O(3)$. Restringiamoci infatti alle prime tre coordinate dei punti p e p' e a quelle dei vettori unitari v e v' tangenti a r e r' : otteniamo due elementi del fibrato tangente (unitario) di S^2 , con punti base diametralmente opposti. Ora è facile provare che possiamo operare con un'isometria per scambiarli (si vede che basta una rotazione di π intorno a un asse opportuna: Fig. 3). Tutto questo implica la tesi, dato che le prime tre coordinate sono sufficienti a determinare i punti dell'iperboloide (quindi l'isometria su I^3 scambia p e p'), mentre i vettori tangenti per simmetria stanno sul piano $\{x_4 = 0\}$ (e sono quindi anch'essi scambiati): quindi l'isometria scambia le rette r e r' . $\square$

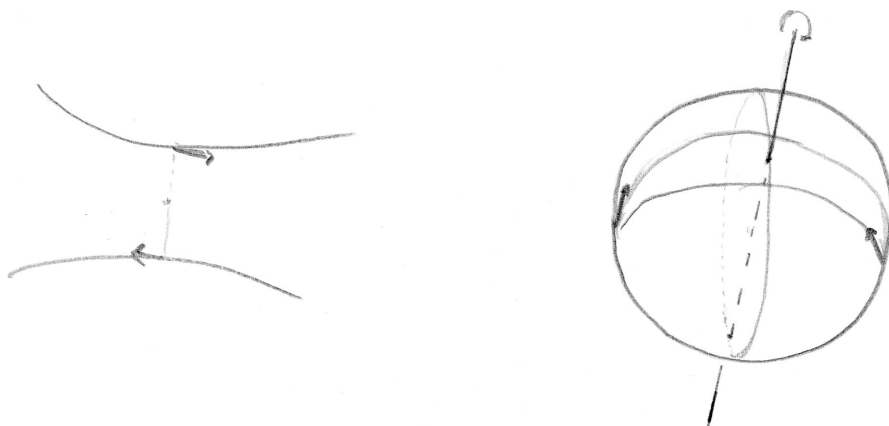


Figura 3: Vogliamo scambiare p , p' e v , v' (a sinistra sono disegnati sul piano anziché nello spazio: v e v' in realtà sono in S^1): la figura a destra mostra che questo è possibile, ruotando di π intorno a un asse opportuno.