

Geometria iperbolica

Esercizi II

Matthew Trager

Esercizio 1. Sia $f \in \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con determinante 1.

Supponiamo innanzitutto $c \neq 0$. Se $z \in \mathbb{C}$ è un punto fisso per f (osserviamo che in questo caso $\infty \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ non può essere fissato), si ha che

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

cioè esistono al più due punti fissi, dati da

$$z_{1,2} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{\Delta}}{2c}$$

dove $\Delta = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 + 4(bc - ad) = (\text{Tr}f)^2 - 4$. Dunque si ha che

- se $|\text{Tr}f| < 2$ i punti fissi sono immaginari coniugati, uno dei quali sarà contenuto nel semipiano superiore: quindi f è una isometria **ellittica**.
- se $|\text{Tr}f| = 2$ esiste un unico punto fisso reale, cioè sul bordo del semipiano, quindi f è una isometria **parabolica**.
- se $|\text{Tr}f| > 2$ esistono due punti fissi reali distinti, quindi f è una isometria **iperbolica**

Viceversa se f è ellittica, i punti fissi non possono essere entrambi reali quindi $|\text{Tr}f| < 2$; se f è parabolica devono essere reali coincidenti da cui $|\text{Tr}f| = 2$; se f è iperbolica devono essere reali distinti cioè $|\text{Tr}f| > 2$.

Rimane da analizzare il caso $c = 0$: ∞ è un punto fisso, mentre un altro è dato da

$$(a - d)z + b = 0$$

Osserviamo però che in questo caso $\text{Tr}f = a + d \geq 2\sqrt{ad} = 2$, con uguaglianza solo nel caso $a = d = 1$. Quindi si ha che

- f non è mai ellittica visto che ha sempre punti fissi reali o all'infinito
- f è parabolica se e solo se $a = d$, cioè $|\operatorname{Tr} f| = 2$
- f è iperbolica se e solo se $a \neq d$, cioè $|\operatorname{Tr} f| > 2$.

□

Esercizio 2. Mostriamo che il gruppo generato da f e g contiene un sottogruppo con un punto di accumulazione.

Nel modello del semispazio, ponendo $x = (x_1, x_2)$, l'isometria parabolica f può essere espressa (a meno di comporre con un'altra isometria, quindi il sottogruppo varierebbe per coniugio) nella forma $(Ax + b, x_3)$ con $A \in O(2)$ e $b \neq 0$; analogamente l'isometria iperbolica g può essere espressa nella forma $\lambda(Bx, x_3)$ con $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ e $B \in O(2)$ (anche se non tutte le trasformazioni definite da questo tipo di espressioni sono paraboliche o iperboliche). È noto che f e g sono univocamente determinate dall'azione sulle prime due coordinate (poiché definisce l'azione su $\partial\mathbb{H}^3$). Supponiamo per il momento che nelle espressioni precedenti A e B conservino l'orientazione. Quindi possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

e, identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , A e B corrispondono rispettivamente alla moltiplicazione per $e^{i\alpha}$ e per $e^{i\beta}$. Quindi possiamo rappresentare f e g in $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ ponendo

$$f = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & \tilde{b} \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}e^{i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix}$$

dove $\tilde{b} = b e^{-i\frac{\alpha}{2}}$. Adesso osserviamo che

$$gfg^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & \tilde{b}w \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \implies gf^k g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & \tilde{b}w^k \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

con $w = \lambda e^{i\beta}$. Poiché $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \neq 1$, si ha che $\lim_{k \rightarrow +\infty} w^k = 0$ oppure $\lim_{k \rightarrow -\infty} w^k = 0$. Da questo segue che il gruppo $\{gf^k g^{-1} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ si accumula nel punto $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$.

Se f o g non conservassero l'orientazione, possiamo ripetere lo stesso ragionamento usando f^2 o g^2 : queste saranno ancora isometrie della forma $(Ax + b, x_3)$ e $\lambda(Bx, x_3)$, $\lambda \neq 1$, (anche se non saranno più necessariamente isometrie iperboliche o paraboliche) e possiamo ancora concludere che esiste un sottogruppo con un punto di accumulazione.

□

Esercizio 3. L'esistenza di un triangolo geodetico in \mathbb{H}^2 con angoli interni assegnati (con somma minore di π) si può provare con un argomento di continuità.

Nel modello del disco, fissiamo nell'origine un vertice P del triangolo e tracciamo due semirette geodetiche r e s che formino un angolo α in P . Adesso scegliamo $x \in r$ e tracciamo una semiretta geodetica t che formi con r un angolo β . Se spostiamo il punto x lungo r notiamo che per x molto vicino a P , le semirette r s t individuano un triangolo "quasi" euclideo con angoli α , β , $\pi - \alpha - \beta$; d'altra parte esiste $x_0 \in r$ tale che, per $x = x_0$, s e t si incrociano sul bordo del disco (cioè all'infinito), con angolo nullo. Poiché l'angolo formato tra s e t varia in maniera continua al variare di x lungo r , si ha che è possibile costruire un triangolo con angoli α , β , γ , per ogni γ tale che $0 < \gamma < \pi - \alpha - \beta$.

Per provare l'unicità basta osservare che nella costruzione precedente, allontanando il punto x da P , l'angolo tra s e t decresce in modo monotono. Quindi, dato un triangolo con angoli interni assegnati α , β , γ , possiamo operare con una isometria e spostare uno dei vertici nell'origine: a questo punto la tesi segue dall'unicità del punto x della costruzione. (Fig. 1)

□

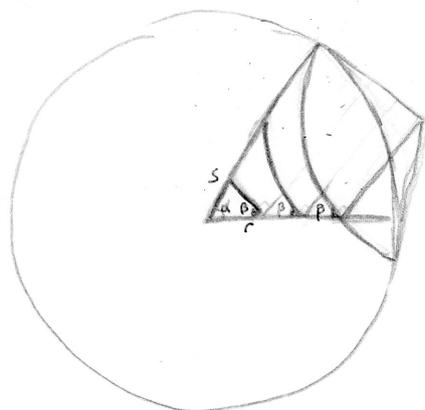


Figura 1.