Geometria iperbolica - Primo foglio
Andrea Petracci

Esercizio 1. Teorema (Hopf-Rinow). *Se M è una varietà riemanniana connessa, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) M è completa con la distanza riemanniana;
(2) ogni geodetica è definita su tutto $\mathbb{R}$;
(3) esiste un punto $p \in M$ tale che ogni geodetica uscente da p è definita su tutto $\mathbb{R}$;
(4) ogni sottoinsieme chiuso e limitato di M è compatto.

Inoltre, ciascuna di queste condizioni implica che:

(5) esiste un punto $p \in M$ tale che, per ogni $q \in M$, esiste una geodetica γ che va da p a q di lunghezza $L(\gamma) = d(p,q)$.

(1) $\Rightarrow$ (2): siano $p \in M$ un punto, $v \in T_pM$ un vettore tangente e $\gamma\colon I \to M$ la geodetica massimale uscente da p con vettore tangente v, dove I è un intervallo aperto contenente 0. Vogliamo dimostrare che $I = \mathbb{R}$. Sia $\tau = \sup I$ e supponiamo per assurdo che $\tau < +\infty$ (se $\inf I > -\infty$ si ragiona in modo del tutto analogo).

Per ogni $0 \leq t \leq t' < \tau$ si ha:

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq L\left(\gamma|_{[t,t']}\right) = \|v\||t - t'|. \tag{1}$$

Se $\{t_n\}$ è una successione in $[0,\tau)$ che converge a τ, allora per (1) la successione $\{\gamma(t_n)\}$ è di Cauchy in M per la distanza riemanniana, perciò converge a un punto $q \in M$. Il punto q non dipende dalla scelta della successione $\{t_n\}$ che converge a τ, perché se $\{\tilde{t}_n\}$ è un'altra successione in $[0,\tau)$ che converge a τ e $\tilde{q} = \lim_n \gamma(\tilde{t}_n)$ allora

$$\begin{aligned} d(q,\tilde{q}) &\leq d(q, \gamma(t_n)) + d(\gamma(t_n), \gamma(\tilde{t}_n)) + d(\tilde{q}, \gamma(\tilde{t}_n)) \\ &\leq d(q, \gamma(t_n)) + \|v\||t_n - \tilde{t}_n| + d(\tilde{q}, \gamma(\tilde{t}_n)) \\ &\leq d(q, \gamma(t_n)) + \|v\||t_n - \tau| + \|v\||\tilde{t}_n - \tau| + d(\tilde{q}, \gamma(\tilde{t}_n)). \end{aligned}$$

Dunque ponendo $\gamma(\tau) = q$ otteniamo un'applicazione continua da $[0,\tau]$ a M.

È noto che esistono un intorno U di q e un numero $\delta > 0$ tali che le geodetiche unitarie uscenti da ogni punto di U esistono per i tempi appartenenti a $(-\delta, \delta)$. Per n sufficientemente grande si ha che $|t_n - \tau| < \delta/\|v\|$ e $\gamma(t_n) \in U$, dunque le geodetiche radiali uscenti da $\gamma(t_n)$ si prolungano per una lunghezza almeno uguale a δ. Siccome $L(\gamma|_{[t_n,\tau]}) = |t_n - \tau|\|v\| < \delta$, la geodetica γ si prolunga oltre τ, e questo produce una contraddizione.

(2) $\Rightarrow$ (3): ovvio.

(3) $\Rightarrow$ (5): sia $p \in M$ un punto in cui le geodetiche uscenti siano definite per tutti i tempi. Sia $q \in M$ distinto da p. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \text{inj.rad}_p$ e $q \notin \overline{B_\varepsilon(p)}$. Sia $z \in \partial B_\varepsilon(p)$ un punto di minimo per la funzione $d(\cdot, q)$ sulla sfera $\partial B_\varepsilon(p)$. Allora esiste una geodetica γ uscente da p e con velocità unitaria tale che $z = \gamma(\varepsilon)$. Il nostro obiettivo è dimostrare che $\gamma(d(p,q)) = q$.

Consideriamo l'insieme

$$A = \{s \geq 0 \mid d(p,q) = s + d(\gamma(s), q)\}.$$

È evidente che $0 \in A$, $A \subseteq [0, d(p,q)]$ e che A è chiuso in $[0, d(p,q)]$. Per non appesantire troppo la trattazione, isoliamo la seguente asserzione.

Asserzione. *Per ogni $s \in A$ tale che $0 < s < d(p,q)$ e per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, si ha $s + \delta \in A$.*

Dimostrazione dell'asserzione. Sia $s \in A$ con $s < d(p,q)$. Per semplicità di notazione, poniamo $x = \gamma(s)$. Allora abbiamo

$$d(p,q) = s + d(x,q), \tag{2}$$

dunque:

$$d(p,q) = s + d(x,q) \geq d(p,x) + d(x,q) \geq d(p,q),$$

da cui si deduce che $d(p,x) = s$.

Poiché $s < d(p,q)$, si ha che $x \neq q$. Dunque è possibile scegliere un $\delta > 0$ tale che $q \notin \overline{B_\delta(x)}$, $\delta < \text{inj.rad}_x$ e $s + \delta < d(p,q)$.

Sia $y \in \partial B_\delta(x)$ un punto di minimo per la funzione $d(\cdot, q)$ sulla sfera $\partial B_\delta(x)$. Sia ora α una curva regolare a tratti che congiunge x con q, allora suddividendo α nella parte fino all'ultima intersezione con $\partial B_\delta(x)$ e nel resto, si ha

$$L(\alpha) \geq \delta + \min_{\partial B_\delta(x)} d(\cdot, q) = \delta + d(y,q).$$

Per l'arbitrarietà di α tra le curve che congiungono x con q, otteniamo $d(x,q) \geq \delta + d(y,q)$. D'altra parte la disuguaglianza inversa è ovvia perché $d(x,y) \leq \delta$, quindi

$$d(x,q) = \delta + d(y,q). \tag{3}$$

Mettendo insieme (2) e (3), si ottiene che

$$d(p,y) \geq d(p,q) - d(y,q) = s + d(x,q) - d(x,q) + \delta = s + \delta.$$

Ma la curva β ottenuta concatenando $\gamma|_{[0,s]}$ con la geodetica radiale da x a y ha lunghezza esattamente $s + \delta$; quindi $d(p,y) = s + \delta$ e la curva β è minimizzante, perciò è una geodetica e coincide dunque con $\gamma|_{[0,s+\delta]}$ (qui abbiamo usato il fatto che $s > 0$). Dunque $y = \gamma(s + \delta)$ e quindi

$$d(\gamma(s+\delta), q) = d(y,q) \overset{(3)}{=} d(x,q) - \delta \overset{(2)}{=} d(p,q) - (s + \delta),$$

cioè $s + \delta \in A$. $\square$

Imitando un pezzo della dimostrazione dell'asserzione, proviamo che $\varepsilon \in A$. Sia α una curva regolare a tratti che congiunge p con q, allora suddividendo α nella parte fino all'ultima intersezione con $\partial B_\varepsilon(p)$ e nel resto, si ha

$$L(\alpha) \geq \varepsilon + \min_{\partial B_\varepsilon(p)} d(\cdot, q) = \varepsilon + d(z,q).$$

Per l'arbitrarietà di α tra le curve che congiungono p con q, otteniamo $d(p,q) \geq \varepsilon + d(z,q)$. D'altra parte la disuguaglianza inversa è ovvia perché $d(p,z) \leq \varepsilon$, quindi $d(p,q) = \varepsilon + d(z,q) = \varepsilon + d(\gamma(\varepsilon), q)$, cioè $\varepsilon \in A$.

Dall'asserzione e dal fatto che $\varepsilon \in A$, si deduce che $\sup A \geq d(p,q)$. Ma A è chiuso in $[0, d(p,q)]$, quindi $d(p,q) \in A$, ovvero $\gamma(d(p,q)) = q$.

(3) $\Rightarrow$ (4): sia $p \in M$ un punto in cui ogni geodetica uscente da p è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poiché ogni sottoinsieme limitato è contenuto in una palla di centro p e poiché i chiusi di un compatto sono compatti, basta dimostrare che le palle chiuse di centro p sono compatte. Ma per (5), le palle chiuse di centro p sono le immagini tramite la mappa $\exp_p$ dei dischi nello spazio tangente T_pM.

(4) $\Rightarrow$ (1): sia (x_n) una successione di Cauchy in M. Sia $X \subseteq M$ la chiusura dell'insieme $\{x_n\}$. Poiché la successione (x_n) è di Cauchy, in particolare è limitata, dunque X è limitato. Per (4), X è uno spazio metrico compatto, dunque per un ben noto risultato di topologia generale esso è completo. Perciò la successione (x_n) converge in X e quindi in M.

Esercizio 2. Prima di risolvere l'esercizio facciamo un'osservazione. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto lorentziano su $\mathbb{R}^3$ e sia I^2 il modello dell'iperboloide per il piano iperbolico $\mathbb{H}^2$.

Osservazione. *Se $x, y \in I^2$ e $x \neq y$, allora il vettore $\langle x, y\rangle x + y$ è non nullo ed è tangente in x alla retta che congiunge x e y.*

Dimostrazione. È facile verificare che i vettori x e y sono linearmente indipendenti e che il vettore dell'enunciato appartiene a $\mathrm{Span}(x, y)$ ed è ortogonale a x. $\square$

Siano $r \subseteq I^2$ una retta e $p \in I^2$ un punto tali che $p \notin r$. Si scelga un punto q_0 di r. A meno di isometria, si può supporre che $q_0 = (0, 0, 1)$ e che $r = I^2 \cap \{x_1 = 0\}$. Inoltre $p = (a, b, \sqrt{1 + a^2 + b^2})$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ perché $p \notin r$. A meno di comporre con la riflessione rispetto alla retta $I^2 \cap \{x_2 = 0\}$, si può supporre che $b \geq 0$.

È chiaro che i punti di r possono essere parametrizzati da $(0, t, \sqrt{1 + t^2})$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Sia ora $q \in r \setminus \{q_0\}$ e in particolare $q = (0, t, \sqrt{1 + t^2})$ per un (unico) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per l'osservazione, un vettore non nullo tangente in q alla retta che congiunge q e p è $v = \langle q, p\rangle q + p$. Analogamente, un vettore non nullo tangente in q alla retta r è $w = \langle q, q_0\rangle q + q_0$. Si verifica che:

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle q, p\rangle\langle q, q_0\rangle\langle q, q\rangle + 2\langle q, p\rangle\langle q, q_0\rangle + \langle p, q_0\rangle \\
&= \langle q, q_0\rangle\langle q, p\rangle + \langle p, q_0\rangle \\
&= -\sqrt{1 + t^2}\left(bt - \sqrt{1 + t^2}\sqrt{1 + a^2 + b^2}\right) - \sqrt{1 + a^2 + b^2} \\
&= -bt\sqrt{1 + t^2} + t^2\sqrt{1 + a^2 + b^2};
\end{aligned}$$

perciò q è il piede di una perpendicolare a r che passa per p se e solo se $\langle v, w\rangle = 0$, ovvero $t = b/\sqrt{1 + a^2}$.

Un vettore non nullo tangente in q_0 alla retta che congiunge q_0 e p è $v = \langle q_0, p\rangle q_0 + p = (a, b, 0)$ e un vettore non nullo tangente in q_0 alla retta r è $w = (0, 1, 0)$, perciò $\langle v, w\rangle = b$. Quindi la retta che congiunge q_0 e p è perpendicolare alla retta r se e solo se $b = 0$.

In conclusione, se $b = 0$ allora la retta $I^2 \cap \{x_2 = 0\}$, cioè la retta che congiunge q_0 e p, è l'unica perpendicolare a r passante per p. Se $b > 0$ allora la retta che congiunge $(0, b/\sqrt{1+a^2}, \sqrt{(1+a^2+b^2)/(1+a^2)})$ e p è l'unica perpendicolare a r passante per p.

Esercizio 3. Dividiamo la risoluzione dell'esercizio in piccoli lemmi.

Lemma 1. *Sia ℓ un sottospazio di $\mathbb{H}^n$. Ogni isometria di ℓ in sé si estende a un'isometria di $\mathbb{H}^n$.*

Dimostrazione. Usiamo il modello dell'iperboloide $I^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\ell = I^n \cap W$. Il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ è non degenere, dunque $\mathbb{R}^{n+1} = W \oplus W^\perp$. Ogni isometria di ℓ proviene da un'isometria di W, allora, usando la decomposizione in somma diretta ortogonale, si costruisce un'isometria f di $\mathbb{R}^{n+1}$ che estende l'isometria di W. A meno di comporre con la riflessione ortogonale lungo W, si può supporre che $f(I^n) = I^n$. Dunque f è un'isometria di I^n che estende l'isometria di ℓ data. $\square$

Lemma 2. *Se r e r' sono due rette incidenti di $\mathbb{H}^2$, allora esiste un'isometria f di $\mathbb{H}^2$ tale che $f(r) = r'$ e $f(r') = r$.*

Dimostrazione. Usiamo il modello dell'iperboloide $I^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. A meno di applicare un'isometria di I^2, si può supporre che $r = I^2 \cap \{x_2 = 0\}$ e $r \cap r' = \{(0,0,1)\}$. Si vede che $r' = I^2 \cap \{x_1 \sin\theta - x_2 \cos\theta = 0\}$, per qualche $\theta \in (0, \pi)$. Si verifica che l'isometria rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa la tesi. $\square$

Lemma 3. *Se r e r' sono due rette asintoticamente parallele di $\mathbb{H}^2$, allora esiste un'isometria f di $\mathbb{H}^2$ tale che $f(r) = r'$ e $f(r') = r$.*

Dimostrazione. Usiamo il modello del semipiano $\{\Im z > 0\} \subseteq \mathbb{C}$. A meno di isometria, si può supporre che $r \cap r' = \{\infty\}$, di modo che r e r' sono rette verticali: $r = \{\Re z = a\}$ e $r' = \{\Re z = b\}$. Allora basta considerare la riflessione rispetto alla retta $\{\Re z = (a+b)/2\}$. $\square$

Lemma 4. *Se r e r' sono due rette ultra-parallele di $\mathbb{H}^3$, allora esiste un'isometria f di $\mathbb{H}^3$ tale che $f(r) = r'$ e $f(r') = r$.*

Dimostrazione. Esiste un un'unica retta s ortogonale sia ad r che ad r'. Sia $p \in s$ il punto medio tra i due punti $r \cap s$ e $r' \cap s$. Usando il modello dell'iperboloide $I^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, a meno di isometria, si può supporre che $p = (0,0,0,1)$ e $s = I^3 \cap \operatorname{Span}(e_3, e_4)$. Allora

$$r \cap s = (0,0,t,\sqrt{1+t^2}),$$
$$r' \cap s = (0,0,-t,\sqrt{1+y^2}),$$

per qualche $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Un vettore tangente a s nel punto $r \cap s$ è $(0, 0, \sqrt{1+t^2}, t)$ (perché appartiene a $\mathrm{Span}(e_3, e_4)$ ed è ortogonale a $r \cap s$), quindi il vettore tangente a r nel punto $r \cap s$ appartiene al piano

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1+t^2} \\ t \end{pmatrix}\right)^{\perp} = \mathrm{Span}(e_1, e_2),$$

quindi

$$r = I^3 \cap \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

per qualche $\theta \in [0, \pi)$. Analogamente,

$$r' = I^3 \cap \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

per qualche $\phi \in [0, \pi)$. L'isometria f rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa la tesi. $\square$

Ora veniamo all'esercizio. Siano r, r' due rette di $\mathbb{H}^n$. Se sono incidenti, allora si conclude grazie ai lemmi 1 e 2. Se sono asintoticamente parallele, si conclude con i lemmi 1 e 3. Se sono ultra-parallele, si conclude con i lemmi 1 e 4.