

Lezioni di geometria iperbolica

Bruno Martelli

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TONELLI", LARGO PONTECORVO 5, 56127
PISA, ITALY

E-mail address: martelli at dm dot unipi dot it

Versione del 14 ottobre 2011

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Lo spazio iperbolico	3
1. Richiami di geometria riemanniana	3
2. I modelli dello spazio iperbolico	12
3. Compattificazione e isometrie dello spazio iperbolico	25
Capitolo 2. Varietà iperboliche	35
1. Gruppi di isometrie	35
2. Spazio di Teichmüller	42

Introduzione

Il testo è rilasciato con licenza *Creative Commons-BY-SA*. Questa licenza permette di distribuire, modificare, creare opere derivate dall'originale, anche a scopi commerciali, a condizione che venga riconosciuta la paternità dell'opera all'autore e che alla nuova opera vengano attribuite le stesse licenze dell'originale.

Le figure presenti sono tutte di pubblico dominio (sia quelle create da me che quelle scaricate da Wikipedia, che erano già in pubblico dominio), tranne le seguenti che sono in licenza CC-BY-SA e possono essere scaricate da Wikipedia:

- Fig. 6 (proiezione stereografica di un panorama parigino) creata da Alexandre Duret-Lutz,
- Fig. 10 (tassellazione del piano iperbolico) e Fig. 16 (orosfera) nel Capitolo 1, e Fig. 3 (pseudosfera) nel Capitolo 2, create da Claudio Rocchini.

Lo spazio iperbolico

1. Richiami di geometria riemanniana

1.1. Varietà differenziabili. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico M di Hausdorff e paracompatto localmente omeomorfo ad \mathbb{R}^n . In altre parole, esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di M fatto di aperti U_i omeomorfi ad aperti V_i di \mathbb{R}^n .

Le varietà topologiche sono oggetti molto difficili da trattare. La loro definizione è troppo generale e non permette di definire e dimostrare quasi nulla. Anche la stessa nozione di dimensione è non banale: per dimostrare che un aperto di \mathbb{R}^k non è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^h per k e h differenti infatti abbiamo bisogno di strumenti raffinati come l'omologia. Definire e trattare sottospazi topologici in una varietà topologica è difficile: ad esempio, la *sfera di Alexander* mostrata in Fig. 1 è un sottospazio di \mathbb{R}^3 topologicamente omeomorfo ad una sfera. È un oggetto molto complicato che ha molti punti che non sono “lisci” e non possono essere “allisciati” in nessun modo.

Per definire oggetti più trattabili e “lisci” si fa generalmente ricorso ai potenti strumenti del calcolo infinitesimale in più variabili. A questo scopo si definiscono

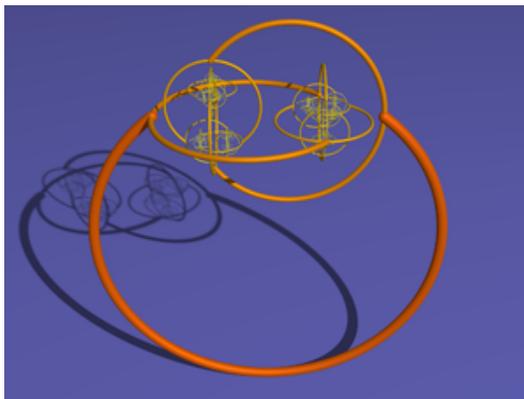


FIGURA 1. La *sfera cornuta di Alexander* è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 omeomorfo alla sfera S^2 . Divide lo spazio \mathbb{R}^3 in due componenti connesse, nessuna delle quali è omeomorfa ad un disco aperto. È stato costruito da Alexander come controesempio ad una naturale generalizzazione del teorema della curva di Jordan in dimensione 3. La naturale generalizzazione sarebbe la seguente: è vero che ogni sfera in \mathbb{R}^3 è il bordo di una palla? Se la sfera è intesa solo come sottovarietà topologica, la risposta è negativa e la sfera di Alexander è un controesempio. Se invece la sfera è intesa come sottovarietà differenziabile la risposta è positiva, come dimostrato dallo stesso Alexander.

le nozioni di *carta* e *atlante*.

DEFINIZIONE 1.1. Sia M una varietà topologica. Una *carta* è un fissato omeomorfismo $\varphi: U_i \rightarrow V_i$ fra un aperto U_i di M ed un aperto V_i di \mathbb{R}^n . Un *atlante* è un insieme di carte $\{(U_i, \varphi_i)\}$ tale che gli aperti U_i ricoprono M . Un *atlante differenziabile* è un atlante in cui le *funzioni di transizione* $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, ove definite, sono lisce.¹

DEFINIZIONE 1.2. Una *varietà differenziabile* è una varietà topologica dotata di un atlante differenziabile.

OSSERVAZIONE 1.3. Molti atlanti diversi su M definiscono in realtà lo stesso oggetto. È possibile dare una definizione che non dipenda dalla particolare scelta dell'atlante. Si definiscono due atlanti *compatibili* se la loro unione è anch'essa un atlante differenziabile. La struttura differenziale di M è quindi identificata dall'atlante compatibile *massimale*, cioè quello che contiene tutti gli atlanti compatibili.

Abbiamo definito gli oggetti, passiamo come sempre a definire degli opportuni morfismi fra gli oggetti.

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili è *liscia* se lo è localmente letta tramite le carte.²

Un *diffeomorfismo* è una funzione liscia $f: M \rightarrow N$ che ammette una inversa $g: N \rightarrow M$ liscia.

Una *curva* in M è una funzione liscia $\gamma: I \rightarrow M$ definita su un intervallo I della retta reale (l'intervallo I può coincidere con \mathbb{R} , essere aperto, chiuso, etc.).

DEFINIZIONE 1.5. Una varietà differenziale è *orientata* se è dotata di un atlante in cui tutte le funzioni di transizione preservano l'orientazione di \mathbb{R}^n , cioè se il determinante del loro differenziale in ogni punto è positivo.

Non tutte le varietà possono essere orientate.

1.2. Spazio tangente. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . È possibile definire per ogni punto $p \in M$ uno spazio vettoriale n -dimensionale $T_p M$ detto *spazio tangente*.

Lo spazio T_p può essere definito brevemente come l'insieme delle curve $\gamma:]-a, a[\rightarrow M$ tali che $\gamma(0) = p$ con $a > 0$ qualsiasi, viste a meno di una relazione di equivalenza. La relazione è la seguente: si identificano due curve che, lette in una carta (U_i, φ_i) , abbiano la stessa tangente nel punto $\varphi_i(p)$. La definizione non dipende dalla carta scelta.

Una carta identifica $T_p M$ con lo spazio tangente al punto $\varphi_i(p)$ nell'aperto $V_i = \varphi_i(U_i)$, cioè con \mathbb{R}^n stesso. Due carte diverse φ_i e φ_j danno due identificazioni differenti, ma la relazione fra queste è un isomorfismo di spazi vettoriali, dato dal

¹Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora la funzione di transizione φ_{ji} è l'omeomorfismo fra gli aperti $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ di \mathbb{R}^n definito come $\varphi_{ji} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j} \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}$. Questa mappa deve essere liscia (cioè C^∞): questa richiesta ha senso perché dominio e codominio sono aperti di \mathbb{R}^n .

²Per ogni $p \in M$ devono esistere due carte (U_i, φ_i) di M e (U'_j, φ'_j) di N contenenti rispettivamente p e $f(p)$ tali che la composizione $\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ sia una funzione liscia da $\varphi_i(U_i)$ in $\varphi'_j(U'_j)$. Le varietà M e N possono avere dimensioni differenti.

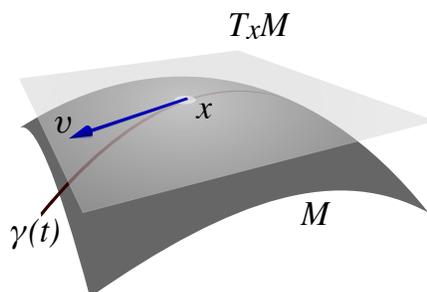


FIGURA 2. Lo spazio tangente in p può essere definito come l'insieme delle curve γ con $\gamma(0) = p$ viste a meno di una relazione di equivalenza, che identifica due curve che hanno (in qualche carta) la stessa tangente in p . Questa condizione è vera in una carta se e solo se è vera in tutte le carte.

differenziale (invertibile) di φ_{ji} . La struttura di spazio vettoriale su T_p è quindi ben definita.

Ogni mappa liscia $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili induce in ogni punto $p \in M$ una mappa lineare $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ fra spazi tangenti nel modo seguente: la curva γ viene mandata nella curva $f \circ \gamma$.

DEFINIZIONE 1.6. Una mappa $f: M \rightarrow N$ è un *diffeomorfismo locale* in un punto $p \in M$ se esistono due aperti $U \subset M$ e $V \subset N$ contenenti rispettivamente p e $f(p)$ tale che $f|_U: U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo.

Il teorema di invertibilità locale per aperti di \mathbb{R}^n implica facilmente il risultato seguente, che mostra l'importanza degli spazi tangenti.

TEOREMA 1.7. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà della stessa dimensione. La mappa è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se e solo se il differenziale $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è invertibile.

Nell'enunciato, una condizione puntuale (differenziabile invertibile in un punto) implica una condizione locale (diffeomorfismo). Vedremo più avanti che in geometria riemanniana una condizione puntuale può anche implicare una condizione globale.

Se $\gamma: I \rightarrow M$ è una curva, la sua *velocità* $\gamma'(t)$ in $t \in I$ è il vettore tangente $\gamma'(t) = d\gamma_t(1)$. Qui per 1 intendiamo il vettore 1 nello spazio tangente \mathbb{R} a p in I . Notiamo che la velocità è un vettore ma non un numero: il modulo di un vettore tangente non è definito in una varietà differenziabile (perché lo spazio tangente è solo uno spazio vettoriale reale, non ha una norma).

1.3. Fibrato tangente. L'unione degli spazi tangenti T_p al variare di $p \in M$ è essa stessa in modo naturale una varietà differenziabile di dimensione doppia $2n$, detta *fibrato tangente*. Questa varietà è indicata con il simbolo TM . Un atlante per M induce infatti un atlante per TM . Come abbiamo visto, una carta (U_i, φ_i) per M identifica $\cup_{p \in U_i} T_p$ con l'aperto $\varphi(U_i) \times \mathbb{R}^n$ di \mathbb{R}^{2n} . Si può quindi dare una topologia a TM in modo che $\cup_{p \in U_i} T_p$ siano aperti e queste identificazioni siano carte. Le funzioni di transizione sono automaticamente differenziabili.

Ogni mappa liscia $f: M \rightarrow N$ fra varietà differenziabili induce in ogni punto $p \in M$ una mappa lineare $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ fra spazi tangenti (e quindi globalmente una mappa differenziabile $f_*: TM \rightarrow TN$ fra fibrati tangenti).

OSSERVAZIONE 1.8. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Una *sottovarietà differenziabile* di dimensione k in M è un sottoinsieme connesso N che può essere definito localmente come luogo di zeri di funzioni a valori in \mathbb{R}^{n-k} con differenziale ovunque surgettivo.³ Teoremi di topologia differenziale garantiscono che un tale sottoinsieme abbia una naturale struttura di varietà differenziabile (di dimensione più bassa). Per ogni $p \in N$ lo spazio tangente T_pN è in modo naturale un sottospazio di T_pM e l'intero fibrato TN è una sottovarietà di TM .

1.4. Tensore metrico. In una varietà differenziabile è definito uno spazio tangente in ogni punto. Non sono però definite le nozioni di distanza fra punti, di volume, di angolo fra vettori, di lunghezza di un vettore. Ad esempio la velocità di una curva è un vettore tangente il cui modulo non è però definito. Per ottenere queste (ed altre) nozioni geometriche è sufficiente introdurre un solo oggetto, il tensore metrico.

Un *tensore metrico* per M è il dato di un prodotto scalare su ogni spazio tangente T_p di M , che vari in modo liscio al variare di p in M .⁴

DEFINIZIONE 1.9. Una *varietà riemanniana* è una varietà differenziabile dotata di un tensore metrico che sia definito positivo su ogni spazio tangente. Generalmente si indica come coppia (M, g) , dove M è la varietà e g il tensore.

Consideriamo subito due esempi fondamentali.

ESEMPIO 1.10. Lo *spazio euclideo* è la varietà \mathbb{R}^n dotata del tensore metrico euclideo $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ su ogni spazio tangente $T_p = \mathbb{R}^n$.

ESEMPIO 1.11. Ogni sottovarietà differenziabile N di una varietà riemanniana M è essa stessa riemanniana: è sufficiente restringere il tensore metrico di M su N .

In particolare, la *sfera*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} e in quanto tale ha una struttura di varietà riemanniana.

Il tensore metrico g definisce in particolare una norma per ogni vettore tangente, ed un angolo fra vettori tangenti nello stesso punto. La velocità $\gamma'(t)$ di una curva ha quindi un modulo $|\gamma'(t)| \geq 0$ ben definito, e due curve che si incontrano in un punto con velocità non nulle formano un angolo ben definito. La lunghezza di una curva $\gamma: I \rightarrow M$ può essere definita come

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt$$

e può essere finita o infinita.

³Oppure possono essere definite localmente come immagini di funzioni con dominio un aperto di \mathbb{R}^k e differenziale ovunque iniettivo. Le due definizioni sono equivalenti e (per fortuna) sono entrambe molto semplici.

⁴Su ogni carta il prodotto scalare è esprimibile come una matrice i cui coefficienti devono variare in modo liscio con il punto.

1.5. Quello che un tensore metrico può fare per voi. Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Le curve possono essere usate per definire una *distanza* su M .

Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ *parte* in $\gamma(a)$ e *arriva* in $\gamma(b)$. Una curva che collega due punti $p, q \in M$ è una qualsiasi curva che parta in p e arrivi in q .

DEFINIZIONE 1.12. La distanza $d(p, q)$ fra due punti p e q è definita come

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

al variare fra le curve γ che collegano p e q .

La varietà M dotata della distanza d è uno spazio metrico (che induce su M la stessa topologia di M).

DEFINIZIONE 1.13. Una *geodetica* è una curva $\gamma: I \rightarrow M$ con velocità costante (in modulo) che realizza localmente le distanze.⁵

Nota che con questa definizione la curva costante $\gamma(t) = p_0$ è una geodetica avente velocità costante zero. Chiameremo queste geodetiche *banali*. Una curva che realizza localmente le distanze può non realizzarle globalmente.

ESEMPIO 1.14. Le geodetiche non banali nello spazio euclideo \mathbb{R}^n sono rette affini percorse a velocità costante.

Le geodetiche non banali nella sfera S^n sono archi di cerchi massimi, percorsi a velocità costante.

Se la varietà differenziabile M è orientata, il tensore metrico induce anche una *forma volume*.

Brevemente, il modo migliore di definire una nozione di volume in una varietà M consiste nel definire una opportuna *n-forma differenziale*, dove n è la dimensione di M . Formalmente, una *n-forma differenziale* ω è il dato in ogni spazio tangente T_p di una forma multilineare alternante

$$\omega_p : \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_n \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'aggettivo *alternante* indica che se vengono scambiati due vettori nel dominio il risultato cambia di segno. A meno di riscalamento esiste un solo ω_p che soddisfa questo criterio (identificando T_p con \mathbb{R}^n , questo non è altro che il determinante). La forma ω_p ovviamente deve cambiare in modo liscio con p .

Le *n*-forme sono utili perché possono essere integrate: in altre parole ha senso la scrittura

$$\int_D \omega$$

su un qualsiasi aperto D . Una *forma volume* in una varietà orientata è una forma ω tale che $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$ su ogni base positiva v_1, \dots, v_n di T_p e per ogni $p \in M$.⁶

Il tensore metrico definisce una forma volume nel modo seguente: basta imporre che $\omega_p(e_1, \dots, e_n) = 1$ per ogni base ortonormale positiva e_1, \dots, e_n . Con questa

⁵Il modulo $k = |\gamma'(t)|$ non deve dipendere da t , e per ogni $t_0 \in I$ deve esistere $\epsilon > 0$ tale che $d(\gamma(t), \gamma(t')) = L(\gamma|_{[t, t']}) = k|t - t'|$ per ogni $t, t' \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$.

⁶L'orientazione su M divide le basi per T_p in positive e negative, per ogni punto $p \in M$.

definizione, ogni aperto D di M ha un ben definito *volume*

$$\text{Vol}(D) = \int_D \omega$$

che è un numero reale positivo oppure infinito. Se D è relativamente compatto il volume è necessariamente finito. In particolare, una varietà riemanniana compatta M ha un volume $\text{Vol}(M)$ finito.

1.6. Mappa esponenziale. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Una geodetica $\gamma : I \rightarrow M$ è *massimale* se non può essere estesa ad una geodetica con dominio J strettamente più grande di I . Le geodetiche massimali sono determinate da condizioni al primo ordine:

TEOREMA 1.15. *Siano $p \in M$ un punto e $v \in T_p M$ un vettore tangente. Esiste un'unica geodetica massimale $\gamma : I \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. L'intervallo I è un aperto contenente 0.*

Questo importante risultato ha numerose applicazioni. Ad esempio, permette di definire il concetto seguente.

DEFINIZIONE 1.16. Sia $p \in M$ un punto. La *mappa esponenziale* in p è la mappa

$$\exp_p : U_p \rightarrow M$$

definita su un sottoinsieme $U_p \subset T_p$ contenente l'origine nel modo seguente.

Un vettore $v \in T_p$ determina una geodetica massimale $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. Sia U l'insieme dei vettori v per cui $1 \in I_v$. Per questi vettori v definiamo $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

TEOREMA 1.17. *L'insieme U_p è un aperto contenente l'origine. Il differenziale della mappa esponenziale \exp_p nell'origine è l'identità e quindi \exp_p è un diffeomorfismo locale nell'origine.*

In questo modo un aperto dello spazio tangente T_p può essere usato come carta locale intorno a p . Recuperiamo quindi l'idea intuitiva che lo spazio tangente approssimi localmente la varietà al primo ordine.

1.7. Raggio di iniettività. Il massimo raggio su cui la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo è chiamato *raggio di iniettività*.

DEFINIZIONE 1.18. Il *raggio di iniettività* $\text{inj}_p M$ di M in un punto p è definito nel modo seguente:

$$\text{inj}_p M = \sup \{ r > 0 \mid \exp_p|_{B_0(r)} \text{ è un diffeomorfismo sull'immagine} \}.$$

Qui $B_0(r)$ è la palla aperta di centro 0 e raggio r nello spazio tangente T_p . Il raggio di iniettività è sempre positivo per il Teorema 1.17. Per ogni r minore del raggio di iniettività la mappa esponenziale trasforma la palla di raggio r in T_p nella palla di raggio r in M . Vale cioè l'uguaglianza

$$\exp_p(B_0(r)) = B_p(r)$$

e la palla $B_p(r)$ è effettivamente diffeomorfa ad una palla aperta in \mathbb{R}^n . Per r grande questo fatto ovviamente può non essere vero: se M è compatta ad esempio esiste un $R > 0$ tale che $B_p(R) = M$.

Il raggio di iniettività $\text{inj}(M)$ di una varietà riemanniana M è

$$\text{inj}(M) = \inf_{x \in M} \text{inj}_x M.$$

Il fatto seguente si dimostra facilmente.

PROPOSIZIONE 1.19. *Una varietà riemanniana compatta ha raggio di iniettività positivo.*

Notiamo infine il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.20. *Sia M una varietà riemanniana. Una curva chiusa di lunghezza minore di $2 \cdot \text{inj}(M)$ è omotopicamente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x un punto qualsiasi attraversato dalla curva. Poiché la curva è più corta di $2 \cdot \text{inj}(M)$ non riesce ad uscire dalla palla $B_x(r)$ per qualche $r < \text{inj}(M) \leq \text{inj}_x M$, e questa palla è effettivamente diffeomorfa ad una palla in \mathbb{R}^n . Quindi la curva è contenuta in un sottoinsieme contrattile di M ed è omotopicamente banale. \square

1.8. Completezza. Una varietà riemanniana (M, g) è anche uno spazio metrico, che può essere completo oppure no. Ad esempio, una varietà riemanniana compatta è sempre completa. D'altra parte, rimuovendo un punto da una varietà riemanniana qualsiasi si ottiene sempre uno spazio non completo. Su \mathbb{R}^n è possibile assegnare strutture riemanniane complete (ad esempio quella euclidea) e non complete (il disco aperto in \mathbb{R}^n è diffeomorfo a \mathbb{R}^n ma la sua metrica indotta non è completa).

La completezza di una varietà riemanniana può essere espressa in vari modi equivalenti:

TEOREMA 1.21 (Hopf-Rinow). *Sia (M, g) varietà riemanniana connessa. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (1) M è completa,
- (2) un sottoinsieme di M è compatto se e solo se è chiuso e limitato,
- (3) ogni geodetica è estendibile su tutto \mathbb{R} .

In particolare, l'ultima condizione è equivalente al fatto che la mappa esponenziale sia definita su tutto lo spazio tangente T_p , per ogni p (e non solo su un suo aperto proprio).

1.9. Curvatura. La *curvatura* di una varietà riemanniana (M, g) è un oggetto complicato, generalmente definito a partire da una *connessione* ∇ detta *connessione di Levi-Civita*. Questa definisce a sua volta un tensore detto *tensore di Riemann* che codifica la curvatura di M nel modo più ampio.

Non introduciamo questi concetti perché sono troppo raffinati per gli spazi che incontreremo: in geometria iperbolica infatti le varietà avranno tutte “curvatura costante” ed il tensore di Riemann non è necessario. Ci basterà introdurre in modo geometrico la nozione di *curvatura sezionale*.

Se M ha dimensione 2, cioè è una superficie, le nozioni di curvatura si semplificano e si riducono tutte ad un unico concetto chiamato *curvatura gaussiana*. Se M è contenuta in \mathbb{R}^3 la curvatura gaussiana è definita come il prodotto delle due curvatures principali. Se M è astratta però non esiste nessuna nozione di curvatura principale e si prende quindi un'altra strada. Esistono vari modi equivalenti

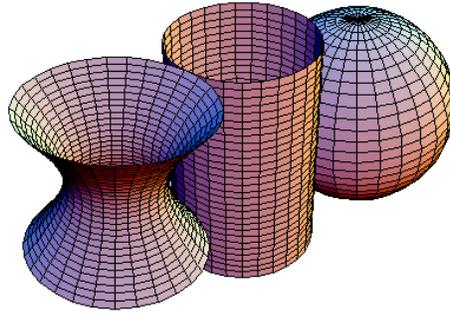


FIGURA 3. Tre superfici nello spazio (iperboloide ad una falda, cilindro, sfera) con curvatura gaussiana rispettivamente negativa, nulla e positiva in ogni punto. Mentre la sfera ha curvatura positiva costante, l'iperboloide ad una falda ha curvatura negativa variabile. Come vedremo, non è possibile costruire una superficie in \mathbb{R}^3 completa con curvatura negativa costante.

di definire la curvatura gaussiana di una superficie astratta, scegliamo uno dei più geometrici.

Abbiamo visto nella sezione precedente che in una varietà riemanniana (M, g) , per ogni punto $p \in M$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che la palla $B_p(\epsilon)$ centrata in p di raggio ϵ sia effettivamente diffeomorfa alla palla usuale in \mathbb{R}^n .

Il volume di questa palla $B_p(\epsilon)$ non è però necessariamente uguale al volume di una palla euclidea: può essere più grande o più piccolo, e questa discrepanza è una misura della curvatura della varietà.

DEFINIZIONE 1.22. Sia (M, g) una superficie. La *curvatura gaussiana* in un punto p è definita come

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left((\pi\epsilon^2 - \text{Vol}(B_p(\epsilon))) \cdot \frac{12}{\pi\epsilon^4} \right).$$

In altre parole, vale la formula

$$\text{Vol}(B_p(\epsilon)) = \pi\epsilon^2 - \frac{\pi\epsilon^4}{12}K + o(\epsilon^4).$$

Notiamo in particolare che K è positivo (negativo) se $B_p(\epsilon)$ ha area più piccola (più grande) di quella usuale euclidea.

Se (M, g) ha dimensione $n \geq 3$ è ancora possibile definire una curvatura valutando la differenza fra $\text{Vol}(B_p(\epsilon))$ e il volume di una palla euclidea n -dimensionale come per la curvatura gaussiana. Si ottiene un valore numerico detto *curvatura scalare*. La curvatura scalare in una varietà di dimensione $n \geq 3$ è però una descrizione molto scarna della curvatura in un punto, e si preferisce quindi generalmente utilizzare una definizione di curvatura che fornisca molte più informazioni. La curvatura di (M, g) è generalmente modellizzata da uno dei seguenti due oggetti: il *tensore di Riemann* oppure la *curvatura sezionale*. Questi due oggetti sono abbastanza diversi ma contengono la stessa quantità di informazioni. Introduciamo qui la curvatura sezionale.

DEFINIZIONE 1.23. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia $p \in M$ un punto e $W \subset T_pM$ un piano vettoriale. Per il Teorema 1.17 esiste un aperto $U_p \subset T_pM$ contenente l'origine su cui \exp_p è un diffeomorfismo sull'immagine. In particolare

$S = \exp_p(U_p \cap W)$ è una piccola superficie liscia in M passante per p . Come sottovarietà liscia S ha una struttura riemanniana indotta da g .

La *curvatura sezionale* di (M, g) lungo (p, W) è definita come la curvatura gaussiana di S nel punto p .

La curvatura sezionale è quindi un numero associato ad ogni punto $p \in M$ e ad ogni piano $W \subset T_p M$.

DEFINIZIONE 1.24. Una varietà riemanniana (M, g) ha *curvatura sezionale costante* K se la curvatura sezionale associata ad ogni punto $p \in M$ e qualsiasi piano $W \subset T_p M$ è sempre pari a K .

OSSERVAZIONE 1.25. In una varietà riemanniana (M, g) è possibile *riscaldare* la metrica di un fattore $\lambda > 0$ sostituendo g con il tensore λg . In ogni punto il prodotto scalare è riscalato di λ . Le lunghezze delle curve vengono riscalate di $\sqrt{\lambda}$ ed i volumi vengono riscalati di $\lambda^{\frac{n}{2}}$. La curvatura sezionale viene riscalata di $1/\lambda$.

Riscalando la metrica è quindi possibile trasformare uno spazio a curvatura sezionale costante K in uno spazio a curvatura sezionale costante $-1, 0$ oppure 1 .

ESEMPIO 1.26. Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n ha curvatura costante zero. Una sfera di raggio R ha curvatura costante $1/R^2$.

1.10. Isometrie. Ogni categoria che si rispetti ha i suoi isomorfismi. Gli isomorfismi delle varietà riemanniane si chiamano *isometrie*.

DEFINIZIONE 1.27. Un diffeomorfismo $f: M \rightarrow N$ fra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) è una *isometria* se preserva il prodotto scalare. Deve cioè valere

$$\langle v, w \rangle = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle$$

per ogni $p \in M$ e per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$. I simboli \langle, \rangle indicano i prodotti scalari in T_x e $T_{f(x)}$.

Le isometrie sono estremamente rigide. Sono infatti determinate dal comportamento puntuale al primo ordine. In altre parole, due isometrie che coincidono al primo ordine in un punto coincidono ovunque:

TEOREMA 1.28. *Siano f, g due isometrie fra varietà riemanniane M e N connesse. Se esiste un punto $p \in M$ tale che $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$, allora $f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che l'insieme $S \subset M$ dei punti p tali che $f(p) = g(p)$ e $df_p = dg_p$ è aperto e chiuso.

I luoghi di coincidenza fra funzioni continue sono generalmente chiusi, e lo si verifica facilmente anche in questo contesto (basta usare una carta). Per dimostrare che S è aperto si usa la mappa esponenziale. Sia $p \in S$. Per il Teorema 1.17 esiste un intorno aperto $U_p \subset T_p M$ dell'origine su cui la mappa esponenziale è un diffeomorfismo sull'immagine. Mostriamo che l'aperto $\exp(U_p)$ è interamente contenuto in S .

Sia $v \in U_p$ un vettore. Per definizione di mappa esponenziale, questo determina una geodetica γ in M tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(1) = \exp(v)$. Le isometrie f e g hanno lo stesso differenziale in p e quindi mandano v nello stesso vettore $w = df_p(v) = dg_p(v) \in T_{f(p)}N$. Le isometrie preservano tutta la struttura riemanniana, ed in particolare mandano geodetiche in geodetiche. Quindi $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ sono

entrambe geodetiche uscenti da $f(p)$ con la stessa velocità iniziale w . Per il Teorema 1.15 le geodetiche coincidono. Quindi $f(\exp(1)) = g(\exp(1))$. Il vettore v è un qualsiasi vettore in U_p e quindi f e g coincidono su tutto l'aperto immagine $\exp(U_p)$. \square

Le isometrie $f: M \rightarrow M$ di una varietà M in sé formano un gruppo che indichiamo con il simbolo $\text{Isom}(M)$.

2. I modelli dello spazio iperbolico

In ogni dimensione $n \geq 2$ esiste un'unica varietà riemanniana completa, semplicemente connessa, e con curvatura sezionale costante 1, 0 oppure -1 a meno di isometrie. Queste tre varietà sono estremamente importanti in geometria riemanniana perché sono il modello fondamentale con cui costruire e studiare le varietà a curvatura costante non semplicemente connesse.

Le tre varietà sono rispettivamente la *sfera* S^n , lo *spazio euclideo* \mathbb{R}^n e lo *spazio iperbolico* \mathbb{H}^n . Come vedremo, ogni varietà completa a curvatura costante ha uno di questi tre spazi come rivestimento universale.

A differenza di S^n e \mathbb{R}^n , lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n può essere definito in vari modi equivalenti, nessuno dei quali è prevalente in letteratura. Ciascuno di questi modi equivalenti è un *modello* per \mathbb{H}^n .

2.1. Iperboloide. La sfera S^n è il luogo dei punti di norma 1 in \mathbb{R}^{n+1} , considerato con l'usuale prodotto scalare (e quindi norma) euclideo. Analogamente, possiamo definire \mathbb{H}^n come il luogo dei punti di norma -1 in \mathbb{R}^{n+1} , dotato dell'usuale prodotto scalare *lorentziano*. Questo luogo dei punti ha in realtà due componenti connesse e ne sceglieremo una.

DEFINIZIONE 2.1. Consideriamo \mathbb{R}^{n+1} dotato del prodotto scalare lorentziano standard di segnatura $(n, 1)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Un vettore $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ è di tipo *tempo*, *luce* o *spazio* a seconda che $\langle x, x \rangle$ sia negativo, nullo o positivo.

Il *modello dell'iperboloide* I^n è definito nel modo seguente:

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_n > 0\}.$$

L'insieme dei punti x con $\langle x, x \rangle = -1$ è un *iperboloide a due falde*, e l'insieme I^n è la componente connessa (falda) con $x_{n+1} > 0$. Mostriamo innanzitutto un fatto generale.

PROPOSIZIONE 2.2. Sia \langle, \rangle un prodotto scalare qualsiasi su \mathbb{R}^n . La funzione

$$f(x) = \langle x, x \rangle$$

è liscia in ogni punto e ha differenziale

$$df_x(y) = 2\langle x, y \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Vale

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

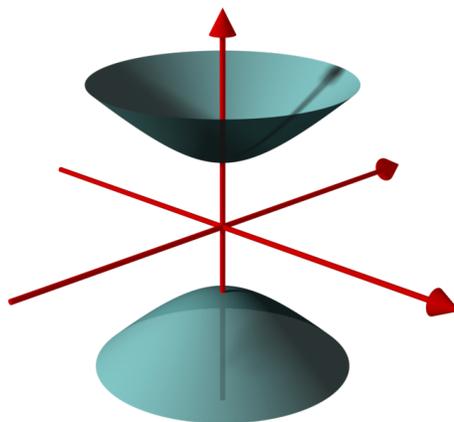


FIGURA 4. L'iperboloide a due falde definito dall'equazione $\langle x, x \rangle = -1$. Il modello I^n è la componente connessa superiore.

La componente $\langle x, y \rangle$ è lineare in y e si verifica facilmente che $\langle y, y \rangle \in o(\|y\|)$, dove $\|y\|$ è l'usuale norma euclidea. \square

COROLLARIO 2.3. *L'iperboloide I^n è una varietà riemanniana.*

DIMOSTRAZIONE. La funzione $f(x) = \langle x, x \rangle$ ha differenziale $2\langle x, y \rangle$. Poiché I^n è il luogo dei punti in cui $\langle x, x \rangle = -1$, per ogni $x \in I^n$ il differenziale $y \mapsto 2\langle x, y \rangle$ è surgettivo. Segue che il luogo degli zeri di $f(x) + 1$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^{n+1} di codimensione uno.

Lo spazio tangente $T_x I^n$ in x a I^n è precisamente il nucleo del differenziale, e cioè l'iperpiano

$$T_x = \{y \mid \langle x, y \rangle = 0\} = x^\perp$$

ortogonale a x secondo il prodotto scalare lorentziano. Poiché x è di tipo tempo, la restrizione del prodotto scalare a x^\perp ha segnatura $(n, 0)$. Quindi il prodotto scalare ristretto al tangente di I^n è definito positivo e I^n ha quindi una struttura di varietà riemanniana. \square

L'iperboloide I^n è uno dei modelli per lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n . Vedremo successivamente che è effettivamente semplicemente connesso, completo, e che ha curvatura costante -1 .

2.2. Isometrie dell'iperboloide. Le isometrie di I^n sono classificate agevolmente con gli strumenti dell'algebra lineare.

DEFINIZIONE 2.4. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Una *isometria* di V è un isomorfismo $f: V \rightarrow V$ tale che $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ per ogni coppia $v, w \in V$. Le isometrie formano un gruppo detto *gruppo ortogonale* che indichiamo con $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard di segnatura $(k, n - k)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i - \sum_{j=k+1}^n x_j y_j$$

allora indichiamo il gruppo ortogonale direttamente con il simbolo $O(k, n - k)$. Identificando gli endomorfismi di \mathbb{R}^n con le matrici $n \times n$, questo gruppo può essere visto come un gruppo moltiplicativo di matrici, sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

In particolare $O(n, 1)$ è il gruppo delle isometrie di \mathbb{R}^{n+1} con il prodotto scalare lorentziano che stiamo considerando. Una isometria preserva il prodotto scalare, e quindi manda l'iperboloide a due falde definito dalla condizione $\langle x, x \rangle = -1$ in sé stesso. Indichiamo con $O_*(n, 1)$ il sottogruppo di indice due in $O(n, 1)$ formato da quelle isometrie che preservano (non scambiano) le due falde dell'iperboloide. In altre parole, è il sottogruppo delle matrici $A \in O(n, 1)$ tali che $A_{n+1, n+1} > 0$. Il gruppo $O_*(n, 1)$ agisce quindi su I^n .

Indichiamo sempre con $\text{Isom}(M)$ il gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M .

PROPOSIZIONE 2.5. *Vale l'uguaglianza*

$$\text{Isom}(I^n) = O_*(n, 1).$$

DIMOSTRAZIONE. Una isometria $A \in O_*(n, 1)$ preserva il prodotto scalare lorentziano e in particolare preserva il prodotto scalare riemanniano (definito positivo) sugli spazi tangenti a I^n . Quindi è una isometria della varietà riemanniana I^n .

D'altra parte, sia f una isometria di I^n . Dobbiamo mostrare che $f \in O_*(n, 1)$. Consideriamo il punto $P = (0, \dots, 0, 1) \in I^n$. Abbiamo $f(P) = Q$ per qualche $Q \in I^n$. Con facili argomenti di algebra lineare si mostra che esiste una isometria $A \in O_*(n, 1)$ tale che $A(Q) = P$. A meno di comporre f con A possiamo quindi supporre che f fissi il punto P .

Il piano tangente T_P a P è l'iperpiano orizzontale $x_{n+1} = 0$. Il differenziale df_P è quindi rappresentabile come una matrice ortogonale $B \in O(n)$. Sia B' la matrice a blocchi

$$B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è un elemento di $O_*(n, 1)$. Definisce quindi una isometria di I^n che coincide con f fino al primo ordine in P . Per il Teorema 1.28 le due isometrie f e B' di I^n coincidono su tutta la varietà I^n , in altre parole $f = B'$. \square

Mostriamo per completezza due risultati analoghi per S^n e \mathbb{R}^n :

PROPOSIZIONE 2.6. *Valgono le uguaglianze*

$$\text{Isom}(S^n) = O(n + 1),$$

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Le dimostrazioni sono analoghe alla proposizione precedente. I gruppi a destra delle uguaglianze sono chiaramente isometrie. Per mostrare che non ci sono altre isometrie oltre a queste, si mostra che una qualsiasi isometria deve coincidere al primo ordine in un (qualsiasi) punto con una di queste. \square

Abbiamo anche dimostrato il fatto seguente. Un *sistema di riferimento* in un punto p di una varietà riemanniana è il dato di una base ortonormale in T_p .

COROLLARIO 2.7. *Sia $M = S^n, \mathbb{R}^n$, oppure I^n . Dati due punti $p, q \in M$ e due sistemi di riferimento in p e q , esiste un'unica isometria che trasforma il primo sistema di riferimento nel secondo.*

Ovviamente il sistema di riferimento viene trasformato tramite il differenziale dell'isometria. Il corollario dice che gli spazi S^n , \mathbb{R}^n e I^n hanno il “massimo numero” di isometrie possibili.

2.3. Sottospazi. Ciascuno dei tre spazi S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n contiene degli opportuni *sottospazi* di dimensione k .

DEFINIZIONE 2.8. Un *sottospazio* k -dimensionale di \mathbb{R}^n , S^n , I^n è rispettivamente:

- un sottospazio affine k -dimensionale di \mathbb{R}^n ,
- l'intersezione di un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} con S^n ,
- l'intersezione di un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} con I^n , quando non è vuota.

A proposito dell'intersezione non vuota, è facile verificare che le condizioni seguenti sono equivalenti per un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

- (1) $W \cap I^n \neq \emptyset$,
- (2) W contiene dei vettori di tipo tempo,
- (3) la segnatura di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ristretta a W è $(k, 1)$.

Un k -sottospazio in \mathbb{R}^n , S^n , \mathbb{H}^n è a sua volta isometrico a \mathbb{R}^k , S^k , \mathbb{H}^k . La intersezione non vuota di due sottospazi è sempre un sottospazio. Una isometria di \mathbb{R}^n , S^n , \mathbb{H}^n manda k -sottospazi in k -sottospazi grazie alle Proposizioni 2.5 e 2.6.

PROPOSIZIONE 2.9. *Dato un k -sottospazio S in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n ed un punto $p \in S$, esiste un unico sottospazio ortogonale S^\perp di dimensione $n - k$ passante per p .*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato per S^n e \mathbb{R}^n è facile. Per I^n basta spostare il punto p in $(0, \dots, 0, 1)$ tramite una isometria. A questo punto i sottospazi passanti per p sono in naturale corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di $\{x_{n+1} = 0\}$. \square

Rette e geodetiche sono in realtà la stessa cosa. Ricordiamo le funzioni trigonometriche iperboliche:

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

PROPOSIZIONE 2.10. *Le geodetiche complete non banali in S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n sono precisamente le rette, percorse a velocità costante. Concretamente, sia $p \in M$ un punto e $v \in T_p M$ un vettore di norma unitaria. La geodetica γ che parte in p con velocità v è la seguente:*

- $\gamma(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot v$ se $M = S^n$,
- $\gamma(t) = p + tv$ se $M = \mathbb{R}^n$,
- $\gamma(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot v$ se $M = I^n$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione per \mathbb{R}^n è banale. Per $M = S^n$ o I^n sia $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ generato da p e v . Sia $f \in O(n)$ o $f \in O_*(n, 1)$ l'isometria di \mathbb{R}^{n+1} tale che $f|_W = \text{id}$ e $f|_{W^\perp} = -\text{id}$. Questa induce una isometria di S^n o I^n che fissa p e v . In particolare deve fissare l'unica geodetica γ che parte da p con velocità v . Quindi γ è contenuta in $W \cap I^n$.

L'intersezione $W \cap I^n$ è una circonferenza (se $M = S^n$) o una iperbole (se $M = I^n$), che γ percorre a velocità costante unitaria: quindi γ è come nell'enunciato. La

velocità è infatti

$$\gamma'(t) = \cosh'(t) \cdot p + \sinh'(t) \cdot v = \sinh(t) \cdot p + \cosh(t) \cdot v$$

che ha norma quadra $\sinh^2(t) - \cosh^2(t) = 1$. \square

COROLLARIO 2.11. *Gli spazi S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n sono completi.*

DIMOSTRAZIONE. La proposizione precedente mostra che tutte le geodetiche sono definite su tutto \mathbb{R} , e quindi lo spazio è completo per il teorema di Hopf-Rinow. \square

Infine, è facile mostrare che per due punti distinti in \mathbb{H}^n passa una sola retta.

OSSERVAZIONE 2.12. Il V postulato di Euclide ovviamente vale solo in \mathbb{R}^2 : data una retta r e un punto P non contenuto in r , esiste una sola retta per P disgiunta da r (in \mathbb{R}^2), non ne esiste nessuna (in S^2) o ne esistono infinite (in \mathbb{H}^2).

2.4. Riflessioni. Dimostriamo in questa sezione un importante teorema di algebra lineare. Per fare ciò introduciamo le riflessioni parallele a vettori non isotropi.

Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non degenero di segnatura $(k, n - k)$. Sia $v \in V$ un vettore non isotropo. Otteniamo una decomposizione ortogonale $V = \text{Span}(v) \oplus v^\perp$. Ogni vettore $w \in V$ si decompone in modo unico come $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in \text{Span}(v)$ e $w_2 \in v^\perp$.

DEFINIZIONE 2.13. La *riflessione* parallela a v (e ortogonale all'iperpiano v^\perp) è l'isomorfismo lineare $R_v: w_1 + w_2 \mapsto -w_1 + w_2$ scritto in componenti rispetto alla decomposizione $V = \text{Span}(v) \oplus v^\perp$.

Una riflessione è una isometria rispetto al prodotto scalare di V . Le riflessioni parallele ai vari vettori sono sufficienti a generare tutte le isometrie dello spazio:

PROPOSIZIONE 2.14. *Sia V dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non degenero. Il gruppo ortogonale $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è generato da riflessioni.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che una generica isometria $f \in O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è generata da riflessioni, per induzione sulla dimensione di V . Sia $v \in V$ un vettore non isotropo. Supponiamo anche che il vettore $w = f(v) - v$ non sia isotropo (altrimenti basta sostituire f con $-f$). Consideriamo la riflessione R_w parallela a w . Mostriamo che $f(v) = R_w(v)$: possiamo decomporre v come

$$v = \frac{f(v) + v}{2} - \frac{f(v) - v}{2}.$$

Il secondo addendo sta in $\text{Span}(w)$ ed il primo sta in w^\perp perché

$$\langle f(v) + v, f(v) - v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

perché f è una isometria. Quindi effettivamente

$$R_w(v) = \frac{f(v) + v}{2} + \frac{f(v) - v}{2} = f(v).$$

La composizione $R_w^{-1} \circ f$ è una isometria che fissa il vettore non isotropo v . Quindi fissa lo spazio ortogonale v^\perp . Concludiamo per induzione sullo spazio v^\perp di dimensione inferiore. \square

Un sottospazio di codimensione 1 in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è detto *iperpiano*. Una riflessione lungo un iperpiano è una ben definita isometria di \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n grazie a quanto abbiamo visto fino ad ora.⁷

PROPOSIZIONE 2.15. *I gruppi di isometrie $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Isom}(S^n)$ e $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sono generati da riflessioni lungo iperpiani.*

DIMOSTRAZIONE. Una isometria di \mathbb{R}^n è del tipo $x \mapsto Ax + b$ con $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$. La componente rotatoria $A \in O(n)$ è generata da riflessioni per la Proposizione 2.14. Una traslazione $x \mapsto x + b$ è anch'essa facilmente ottenibile come composizione di due riflessioni.

Le isometrie di S^n sono $O(n+1)$ e sono generate da riflessioni lungo iperpiani per la Proposizione 2.14.

Le isometrie di \mathbb{H}^n sono $O_*(n, 1)$. Ogni elemento $f \in O_*(n, 1)$ è composizione di riflessioni $f = R_1 \circ \dots \circ R_k$ per la Proposizione 2.14. Affinché una riflessione $R = R_i$ sia un elemento di $O_*(n, 1)$ è però necessario che non permuti le due falde dell'iperboloide, cioè che R intersechi I^n , cioè che $v = R^\perp$ sia di tipo spazio.

Supponiamo che v sia invece di tipo tempo. Possiamo completare v a base ortogonale $v = v_1, \dots, v_n$ di \mathbb{R}^{n+1} . I vettori successivi v_2, \dots, v_{n+1} sono necessariamente di tipo spazio. Sia r_j la riflessione parallela al vettore v_j . Abbiamo $R = r_1$ e $r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} = -\text{id}$. Possiamo quindi sostituire $R = R_i$ con $-r_{n+1} \circ \dots \circ r_2$. Alla fine otteniamo a meno di segno una composizione di riflessioni $f = \pm R_1 \circ \dots \circ R_n$ tutte appartenenti a $O_*(n, 1)$. Il segno ± 1 è necessariamente positivo poiché anche f appartiene a $O_*(n, 1)$. \square

2.5. Mappe conformi e inversioni lungo sfere. Per introdurre due nuovi modelli avremo bisogno di un paio di nozioni geometriche importanti.

Una mappa $f: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane è una *mappa conforme* se per ogni $p \in M$ esiste un $\lambda_p > 0$ tale che

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \lambda_p \langle v, w \rangle$$

per ogni $v, w \in T_p M$. Una mappa conforme non preserva le lunghezze dei vettori tangenti ma preserva tutti gli angoli fra questi.

OSSERVAZIONE 2.16. È possibile dimostrare che un diffeomorfismo $f: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane è conforme se e solo se preserva tutti gli angoli in ogni punto. Per questo una mappa conforme è spesso definita in modo equivalente come un diffeomorfismo che preserva gli angoli.

Abbiamo definito precedentemente i k -sottospazi in S^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , passiamo a definire le k -sfere. Una *ipersfera* (o $(n-1)$ -sfera) in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è il bordo $\partial B_p(r)$ di una palla centrata in un punto avente raggio r minore del raggio di iniettività inj_p in p (questa nozione è valida in ogni varietà riemanniana). Notiamo che il raggio di iniettività in un punto di S^n è π , quindi abbiamo $r < \pi$, mentre il raggio di iniettività di un punto in \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n è infinito.

DEFINIZIONE 2.17. Una k -sfera in S^n , \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n è l'intersezione fra una ipersfera e un $(k+1)$ -piano passante per il suo centro.

⁷Se l'iperpiano è in S^n o I^n , questo è per definizione intersezione di S^n o I^n con un iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} dotato di prodotto scalare con segnatura $(n+1, 0)$ o $(n, 1)$. Una riflessione lungo questo iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} è un elemento di $O(n)$ oppure $O_*(n, 1)$ e quindi induce una isometria su S^n o I^n .

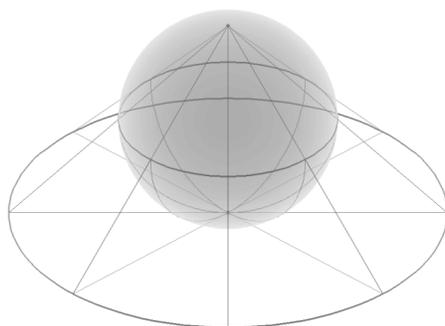


FIGURA 5. La proiezione stereografica della sfera meno un punto su un piano tangente.

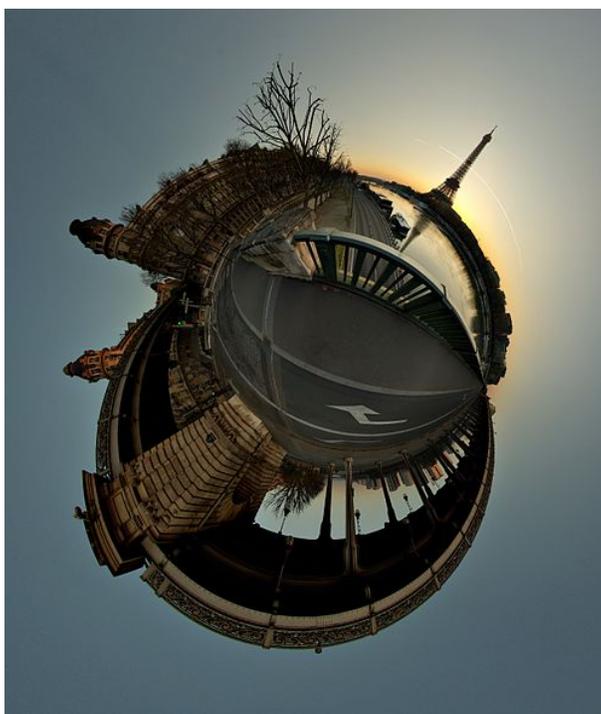


FIGURA 6. La proiezione stereografica è una mappa conforme. La foto mostra la proiezione stereografica planare della vista (sferica) che si ottiene in un punto a Parigi. Le linee rette sono trasformate in cerchi, ma gli angoli fra questi sono preservati. Figura creata da Alexandre Duret-Lutz.

La *proiezione stereografica* della sfera S^n meno un punto ∞ sull'iperpiano tangente al punto opposto è la mappa definita come illustrato in Figura 5. Si veda ad esempio la Figura 6.

PROPOSIZIONE 2.18. *La proiezione stereografica*

- (1) è una mappa conforme,
- (2) trasforma le k -sfere di S^n in k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n .

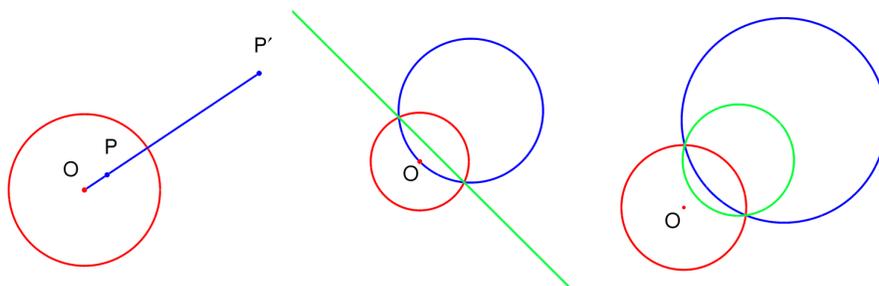


FIGURA 7. L'inversione lungo una sfera di centro O e raggio r sposta P in P' in modo che $OP \times OP' = r^2$ (sinistra) e trasforma una k -sfera S in un k -piano se $O \in S$ (centro) e in una k -sfera se $O \notin S$ (destra). Visto in S^n , l'iperpiano verde centrale è anch'esso una sfera (aggiungendo ∞): vista come trasformazione da S^n in sé l'inversione manda k -sfere in k -sfere.

Tramite proiezione stereografica possiamo scrivere $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ e definire alcune semplici mappe conformi da S^n in sé:

OSSERVAZIONE 2.19. Traslazioni e omotetie sono mappe conformi di \mathbb{R}^n . Si estendono a mappe conformi di S^n ponendo ∞ come punto fisso.

Un'altra mappa conforme è la seguente.

DEFINIZIONE 2.20. Sia $S = S(x_0, r)$ la sfera in \mathbb{R}^n di centro x_0 e raggio r . Consideriamo $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. L'*inversione* lungo S è la mappa $i: S^n \rightarrow S^n$ definita nel modo seguente:

$$i(x) = x_0 + r^2 \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2}$$

ed estesa a tutta la sfera ponendo $f(x_0) = \infty$ e $f(\infty) = x_0$.

Una descrizione geometrica dell'inversione è fornita in Fig. 7.

PROPOSIZIONE 2.21. *Valgono i fatti seguenti.*

- (1) L'*inversione* $i: S^n \rightarrow S^n$ è una mappa liscia e conforme.
- (2) L'*inversione* manda k -sfere in k -sfere.

DIMOSTRAZIONE. A meno di comporre con traslazioni e omotetie (che sono lisce, conformi e preservano k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n) possiamo supporre $x_0 = 0$ e $r = 2$. La mappa letta su \mathbb{R}^n è quindi $i(x) = x/\|x\|^2$. Letta su S^n è semplicemente una riflessione rispetto all'equatore orizzontale. \square

Possiamo interpretare la riflessione rispetto ad un iperpiano affine in \mathbb{R}^n come una inversione lungo una sfera contenente l'infinito.

2.6. Il disco di Poincaré. Introduciamo due modelli di \mathbb{H}^n (il *disco* e il *semispazio*) più semplici da visualizzare dell'iperboloide, soprattutto nelle dimensioni $n = 2$ e 3 che ci interesseranno particolarmente in seguito.

Il primo modello conforme per \mathbb{H}^n è il *disco di Poincaré*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

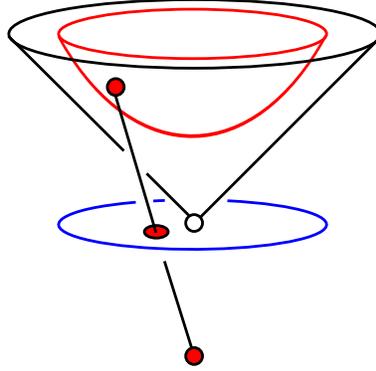


FIGURA 8. La proiezione su $P = (0, \dots, 0, -1)$ induce una bigezione fra I^n e D^n .

Il tensore metrico su D^n ovviamente non è quello euclideo indotto da \mathbb{R}^n , ma è quello indotto da un particolare diffeomorfismo fra I^n e D^n che costruiamo ora. Possiamo identificare \mathbb{R}^n con l'iperpiano orizzontale $x_{n+1} = 0$ in \mathbb{R}^{n+1} e notare che la proiezione sul punto $P = (0, \dots, 0, -1)$ descritta in Fig. 8 induce una bigezione fra I^n ed il disco orizzontale $D^n \subset \mathbb{R}^n$. La proiezione p ha la forma seguente:

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{x_{n+1} + 1}$$

dove l'ultima coordinata nulla per $p(x)$ è stata omessa. Poiché D^n è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , lo spazio tangente in ogni punto di D^n è naturalmente identificato con \mathbb{R}^n .

PROPOSIZIONE 2.22. *Il tensore metrico su D^n indotto dalla proiezione p è il seguente:*

$$g_x = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \cdot g^E$$

dove $g^E(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ è l'usuale tensore metrico euclideo su $D^n \subset \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in D^n$. La mappa inversa p^{-1} alla proiezione è la seguente:

$$p^{-1}(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - \|x\|^2}, \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right).$$

Le rotazioni orizzontali $O(n)$ sono isometrie per I^n e la g_x nell'enunciato è invariante per l'azione di $O(n)$. Possiamo quindi restringerci al caso $x = (x_1, 0, \dots, 0)$. Quindi

$$p^{-1}(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2}, 0, \dots, 0, \frac{1 + x_1^2}{1 - x_1^2} \right).$$

Il piano tangente T_x è come sempre identificato con \mathbb{R}^n . È facile calcolare le immagini della base canonica di \mathbb{R}^n tramite il differenziale:

$$\begin{aligned} dp_x^{-1}: e_1 &\mapsto \frac{2}{(1 - x_1^2)^2} (1 + x_1^2, 0, \dots, 0, 2x_1), \\ dp_x^{-1}: e_i &\mapsto \frac{2}{1 - x_1^2} e_i \quad \forall i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Le immagini sono vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare lorentziano aventi tutti norma $\frac{2}{1-x_1^2}$, quindi g_x è $\frac{4}{(1-x_1^2)^2}$ volte il prodotto scalare euclideo. \square

Vediamo a questo punto come descrivere i k -sottospazi nel modello del disco.

PROPOSIZIONE 2.23. *I k -sottospazi in D^n sono tutte e sole le intersezioni di D^n con k -sfere e k -piani di \mathbb{R}^n ortogonali a ∂D^n .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni k -sottospazio è intersezione di iperpiani, è facile ricondursi al caso $k = n - 1$. Un iperpiano in I^n è $I^n \cap v^\perp$ per qualche vettore v di tipo spazio. Se v è orizzontale (cioè la sua ultima coordinata è nulla) allora v^\perp è verticale e viene proiettato su un iperpiano di D^n passante per il centro. Consideriamo quindi il caso in cui v non sia orizzontale: a meno di isometrie orizzontali in $O(n)$ e di riscalamenti per v è sufficiente considerare il caso $v = (\alpha, 0, \dots, 0, 1)$ con $\alpha > 1$. L'iperpiano è quindi

$$\{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\} \cap \{x_{n+1} = \alpha x_1\}.$$

D'altra parte la sfera in \mathbb{R}^n di centro $(\alpha, 0, \dots, 0)$ e raggio $\alpha^2 - 1$ è ortogonale a ∂D^n ed è l'insieme dei punti

$$\{(y_1 - \alpha)^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \alpha^2 - 1\} = \{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 2\alpha y_1 = -1\}$$

cioè gli y tali che $\|y\|^2 = -1 + \frac{2y_1}{\alpha}$. Se $y = p(x)$ valgono le relazioni

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \quad \|y\|^2 = \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1}$$

che trasformano quest'ultima relazione in $x_{n+1} = \alpha x_1$. \square

Infine, vediamo come leggere in D^n una riflessione rispetto ad un iperpiano.

PROPOSIZIONE 2.24. *Sia $S = D^n \cap S'$ un iperpiano, ottenuto a partire da un iperpiano o una ipersfera S' ortogonale a ∂D^n . La riflessione rispetto a S è la normale riflessione euclidea (se S' è un piano) o un'inversione (se S' è una sfera).*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che la riflessione o inversione rispetto a S preserva il tensore metrico su D^n e quindi è una isometria. Poiché la riflessione è l'unica isometria non banale che preserva un iperpiano abbiamo concluso.

Se S' è un piano allora contiene l'origine e la riflessione è una isometria per D^n . Consideriamo il caso in cui S' sia una ipersfera. Innanzitutto, poiché S' è ortogonale a ∂D^n , l'inversione manda effettivamente il disco D^n in se stesso. A meno di rotazioni possiamo supporre che S' abbia centro $x_0 = (\alpha, 0, \dots, 0)$ con $\alpha > 1$ e raggio al quadrato $r^2 = \alpha^2 - 1$. L'inversione ha quindi la forma seguente:

$$i(x) = x_0 + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} r^2 = (\alpha, 0, \dots, 0) + \lambda(x_1 - \alpha, x_2, \dots, x_n)$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$\lambda = \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\|x\|^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2}.$$

Sappiamo già che le inversioni sono conformi, quindi il differenziale di i in x è una costante positiva per una isometria. Si verifica facilmente che la costante positiva

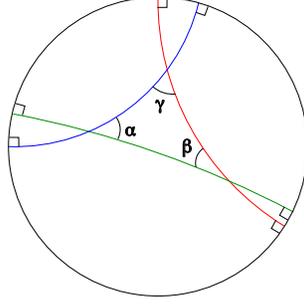


FIGURA 9. Tre rette che determinano un triangolo nel disco di Poincaré. Gli angoli interni α, β e γ sono quelli euclidei.

è proprio λ . Notiamo inoltre che

$$\begin{aligned}
 \|i(x)\|^2 &= \|(\alpha(1-\lambda) + \lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\|^2 \\
 &= \lambda^2 \|x\|^2 + \alpha^2 (1-\lambda)^2 + 2\alpha(1-\lambda)\lambda x_1 \\
 &= (\lambda-1)\lambda(\|x\|^2 - 2x_1\alpha + \alpha^2) + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\alpha^2 \\
 &= (\lambda-1)\lambda \frac{\alpha^2 - 1}{\lambda} + \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\alpha^2 \\
 &= 1 - \lambda + \lambda\|x\|^2
 \end{aligned}$$

e quindi $1 - \|i(x)\|^2 = \lambda(1 - \|x\|^2)$ che implica

$$\left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{2}{1 - \|i(x)\|^2} \right)^2 \lambda.$$

Quindi i preserva il tensore metrico. \square

2.7. Il modello del semispazio. Il disco di Poincaré D^n è un modello *conforme* dello spazio iperbolico: il tensore metrico differisce da quello euclideo soltanto per uno scalare (che dipende dal punto x). Le distanze in D^n sono ben diverse da quelle euclidee, ma gli angoli fra curve e sottospazi sono invece gli stessi. Ad esempio, è possibile tracciare tre rette nel piano iperbolico come in Fig. 9: gli angoli interni sono quelli formati dalle tangenti nei punti di intersezione. Si verifica in particolare facilmente che la somma $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre minore di π .

Introduciamo un altro modello conforme. Il *modello del semispazio* è l'insieme

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Il modello H^n è ottenuto dal disco D^n tramite una inversione in \mathbb{R}^n di centro $(0, \dots, 0, -1)$ e di raggio $\sqrt{2}$ come mostrato in Fig. 11. Ricordiamo che le inversioni sono mappe conformi che mandano k -sfere e k -piani in k -sfere e k -piani. Ne segue che anche H^n è un modello conforme dello spazio iperbolico, e che i k -sottospazi in H^n sono ottenuti (come per D^n) intersecando k -piani e k -sfere di \mathbb{R}^n ortogonali al bordo ∂H^n come in Fig. 12. Il bordo ∂H^n è l'iperpiano orizzontale $\{x_n = 0\}$, a cui aggiungiamo un punto all'infinito ∞ , così da avere una corrispondenza biunivoca fra ∂H^n e ∂D^n tramite l'inversione.

PROPOSIZIONE 2.25. *Le traslazioni orizzontali $x \mapsto x+b$ con $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$ e le omotetie $x \mapsto \lambda x$ con $\lambda > 0$ sono isometrie di \mathbb{H}^n .*

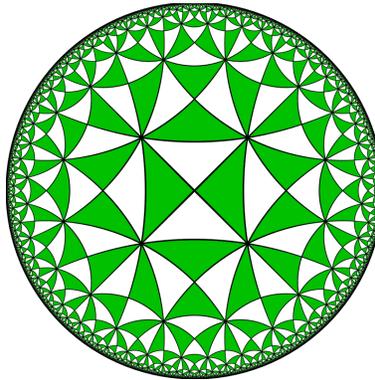


FIGURA 10. Una *tassellazione* di S^2 , \mathbb{R}^2 o \mathbb{H}^2 è una suddivisione del piano in poligoni. La tassellazione di \mathbb{H}^2 mostrata in figura è ottenuta disegnando infinite rette nel piano. I triangoli sono rettangoli e isosceli, e sono tutti isometrici fra loro.

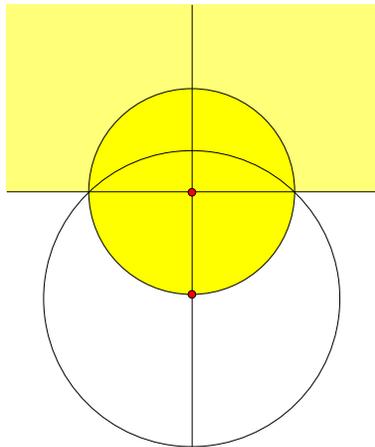


FIGURA 11. L'inversione lungo la sfera di centro $(0, \dots, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$ trasforma il disco di Poincaré nel semispazio.

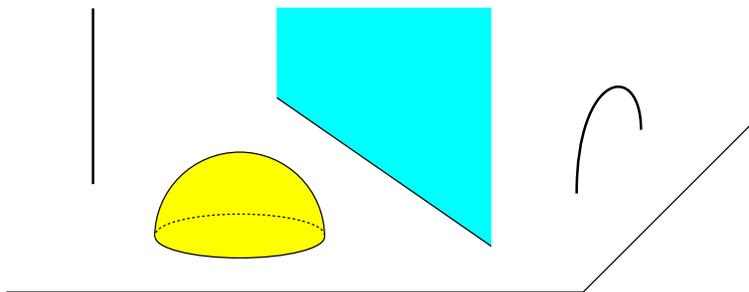


FIGURA 12. Rette e piani in \mathbb{H}^3 visualizzate con il modello del semispazio.

DIMOSTRAZIONE. Ogni traslazione si ottiene come composizione di due inversioni lungo iperpiani verticali ortogonali a b . Ogni omotetia si ottiene come composizione di due inversioni lungo ipersfere opportune centrate nell'origine. \square

Il tensore metrico su H^n ha una forma molto semplice.

PROPOSIZIONE 2.26. *Il tensore metrico su H^n è il seguente:*

$$g_x = \frac{1}{x_n^2} \cdot g^E$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e g^E è l'usuale tensore metrico euclideo su $H^n \subset \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. L'inversione $i: D^n \rightarrow H^n$ sposta l'origine O nel punto $P = (0, \dots, 0, 1)$. Una inversione è una mappa conforme e quindi il differenziale in un punto x è λ volte una isometria di \mathbb{R}^n , con scalare λ dipendente da x . In $x = O$ lo scalare λ è 2. Indicando con g^{H^n} e g^{D^n} i tensori di H^n e D^n e g^E il tensore euclideo, otteniamo

$$g_P^{H^n} = \frac{1}{2} g_O^{D^n} \frac{1}{2} = \frac{4}{4} g^E = g^E.$$

Tramite una traslazione orizzontale possiamo spostare P in un qualsiasi altro punto ad altezza $x_n = 1$. Tutti i punti ad altezza $x_n = 1$ hanno quindi tensore metrico g^E . D'altra parte, la omotetia $x \mapsto \lambda x$ è una isometria di H^n che trasforma un punto ad altezza 1 in un punto ad altezza λ . Poiché il differenziale dell'omotetia è $\lambda \cdot \text{id}$, il tensore metrico nei punti ad altezza λ è $\frac{1}{\lambda^2}$. \square

Anche le geodetiche verticali hanno una forma particolarmente semplice.

PROPOSIZIONE 2.27. *Una geodetica verticale in H^n a velocità unitaria è parametrizzata nel modo seguente:*

$$\gamma(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t).$$

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che la velocità ha sempre norma uno. Ricordiamo che un vettore v dello spazio tangente nel punto (x_1, \dots, x_n) ha norma $\frac{|v|^E}{x_n}$ dove $|v|^E$ indica la norma euclidea. La velocità al tempo t è $\gamma'(t) = (0, \dots, 0, e^t)$ che ha norma

$$|\gamma'(t)| = \frac{e^t}{e^t} = 1.$$

\square

Possiamo facilmente dedurre una formula per le geodetiche in D^n passanti per l'origine. Ricordiamo la tangente iperbolica:

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

PROPOSIZIONE 2.28. *Una geodetica in D^n per l'origine con velocità unitaria e direzione $x \in S^{n-1}$ è parametrizzata nel modo seguente:*

$$\gamma(t) = \frac{e^{\|x\|} - 1}{e^{\|x\|} + 1} \cdot x = \left(\tanh \frac{\|x\|}{2} \right) \cdot x.$$

DIMOSTRAZIONE. Si può supporre $x = (0, \dots, 0, 1)$ e ottenere questa parametrizzazione da quella per una retta verticale in \mathbb{H}^n tramite inversione. \square

Otteniamo in particolare:

COROLLARIO 2.29. *La mappa esponenziale $\exp_0: T_0 \rightarrow D^n$ nell'origine 0 di D^n è il diffeomorfismo:*

$$\exp_0(x) = \frac{e^{\|x\|} - 1}{e^{\|x\|} + 1} \cdot \frac{x}{\|x\|} = \left(\tanh \frac{\|x\|}{2} \right) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Le mappe esponenziali sono quindi tutte isomorfismi ed il raggio di iniettività in ogni punto di \mathbb{H}^n è infinito.

COROLLARIO 2.30. *Nei modelli conformi del disco e del semispazio le k -sfere sono precisamente le usuali k -sfere euclidee (ma con centro e raggio generalmente differenti).*

DIMOSTRAZIONE. Nel modello del disco, la sfera di centro 0 e raggio r è l'usuale sfera di centro 0 e raggio $\ln \frac{1+r}{1-r}$. La generica sfera di centro p e raggio r è ottenuta da questa tramite isometria. Le isometrie di \mathbb{H}^n sono composizioni di riflessioni per la Proposizione 2.15, che nel modello del disco sono inversioni lungo piani e sfere, e quindi mandano sfere e piani in sfere e piani per la Proposizione 2.21. Idem per il modello del semispazio che è collegato al disco tramite inversione. \square

3. Compattificazione e isometrie dello spazio iperbolico

3.1. Punti all'infinito dello spazio iperbolico. In questa sezione compattifichiamo lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n aggiungendo i suoi "punti all'infinito". Per definire i punti all'infinito abbiamo bisogno della nozione seguente.

DEFINIZIONE 3.1. Una *semiretta geodetica* in \mathbb{H}^n è una geodetica $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ con velocità costante pari a uno.

DEFINIZIONE 3.2. L'insieme $\partial\mathbb{H}^n$ dei *punti all'infinito* di \mathbb{H}^n è definito come l'insieme delle semirette geodetiche quozientato per la seguente relazione di equivalenza:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \sup \{ \gamma_1(t), \gamma_2(t) \} < +\infty.$$

Possiamo aggiungere a \mathbb{H}^n i suoi punti all'infinito e definire quindi

$$\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n.$$

PROPOSIZIONE 3.3. *Usando il modello del disco D^n , otteniamo una naturale corrispondenza biunivoca fra ∂D^n e $\partial\mathbb{H}^n$ e quindi fra il disco chiuso $\overline{D^n}$ e $\overline{\mathbb{H}^n}$.*

DIMOSTRAZIONE. Una semiretta geodetica γ in D^n è un arco di circonferenza ortogonale a ∂D^n e quindi $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ è un punto in ∂D^n . Ci resta da dimostrare che due semirette geodetiche tendono allo stesso punto se e solo se stanno nella stessa classe di equivalenza.

Supponiamo che due semirette γ_1, γ_2 determinino lo stesso punto in ∂D^n . Possiamo usare il modello del semispazio e porre questo punto all'infinito: quindi γ_1 e γ_2 sono due semirette geodetiche verticali che puntano verso l'alto:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n e^t), \\ \gamma_2(t) &= (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n e^t), \end{aligned}$$

Supponiamo che $x_n < y_n$: posso sostituire γ_1 con la geodetica $\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t + \ln \frac{y_n}{x_n})$ che parte alla stessa altezza di γ_2 ed è chiaramente equivalente a γ_1 visto che $d(\tilde{\gamma}_1(t), \gamma_1(t)) = \ln \frac{y_n}{x_n}$ per ogni t . Si veda Fig. 13.

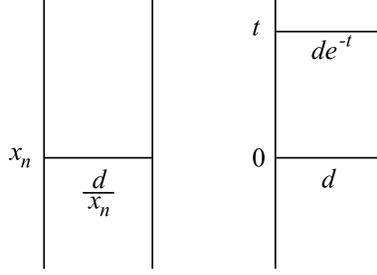


FIGURA 13. Due rette verticali in \mathbb{H}^n a distanza euclidea d . La lunghezza iperbolica del segmento orizzontale che le collega ad altezza x_n è $\frac{d}{x_n}$ e quindi tende a zero per $x_n \rightarrow \infty$ (sinistra). Usando come parametro di altezza la (più intrinseca) lunghezza d'arco delle geodetiche invece di x_n , si vede che le due geodetiche γ_1 e γ_2 in realtà si avvicinano molto più velocemente, in modo esponenziale. Infatti il segmento orizzontale che collega $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ ha lunghezza de^{-t} (destra). Ne deduciamo che $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq de^{-t}$.

Posso quindi supporre che $x_n = y_n$. Sia d la distanza fra (x_1, \dots, x_{n-1}) e (y_1, \dots, y_{n-1}) in \mathbb{R}^{n-1} . Il segmento orizzontale che collega $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ ha lunghezza euclidea d ma ha lunghezza iperbolica $\frac{d}{x_n e^t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Quindi $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

D'altra parte se γ_1 e γ_2 puntano verso punti diversi di $\partial\mathbb{H}^n$ è facile vedere che non sono equivalenti. Possiamo supporre che γ_1 sia verticale verso l'alto e γ_2 punti verso un punto qualsiasi di $\{x_n = 0\}$. Per ogni $M > 0$ esiste un $t_0 > 0$ tale che $\gamma_1(t)$ viva definitivamente in $x_{n+1} > M$ e $\gamma_2(t)$ viva definitivamente in $x_n < \frac{1}{M}$. La distanza fra $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ è quindi definitivamente maggiore di $\ln M^2$ per ogni M , cioè diverge. \square

Possiamo munire $\overline{\mathbb{H}^n}$ della topologia di $\overline{D^n}$: in questo modo abbiamo *compatificato* lo spazio iperbolico aggiungendo i suoi punti all'infinito. La parte interna di $\overline{\mathbb{H}^n}$ è \mathbb{H}^n . I punti all'infinito formano una sfera $\partial\mathbb{H}^n$.

Nota che mentre \mathbb{H}^n è una varietà riemanniana completa (e quindi uno spazio metrico), la sua compattezza $\overline{\mathbb{H}^n}$ è solo uno spazio topologico: non è definita una distanza fra un punto di $\partial\mathbb{H}^n$ ed un punto in \mathbb{H}^n , né fra due punti distinti di $\partial\mathbb{H}^n$.

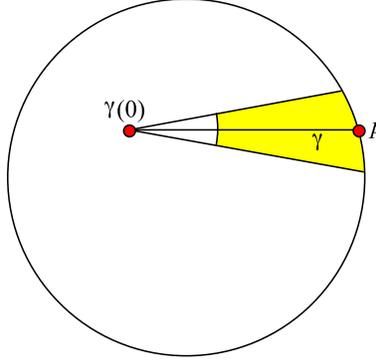
La topologia su $\overline{\mathbb{H}^n}$ può essere in realtà definita senza fare uso del modello D^n . La definizione intrinseca è la seguente: oltre agli aperti di \mathbb{H}^n , aggiungiamo per ogni $p \in \partial\mathbb{H}^n$ un sistema di intorni aperti di p in $\overline{\mathbb{H}^n}$ nel modo seguente.

Sia γ una geodetica che rappresenta p e sia V un intorno aperto del vettore $\gamma'(0)$ nella sfera unitaria di $T_{\gamma(0)}$. Sia infine $r > 0$. Definiamo l'insieme

$$U(\gamma, V, r) = \{\alpha(t) \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V, t > r\} \\ \bigcup \{[\alpha] \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V\}$$

dove α indica sempre una semiretta in \mathbb{H}^n . Si veda ad esempio Fig. 14. Definiamo un sistema di intorni per p prendendo gli aperti $U(\gamma, V, r)$ al variare di γ , V e r . Si ottiene così per $\overline{\mathbb{H}^n}$ la stessa topologia indotta da $\overline{D^n}$.

3.2. Isometrie ellittiche, paraboliche e iperboliche. Ogni isometria di \mathbb{H}^n si estende al bordo.

FIGURA 14. Un intorno $U(\gamma, V, r)$ del punto $p \in \partial\mathbb{H}^n$ (in giallo).

PROPOSIZIONE 3.4. *Ogni isometria $\varphi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende ad un unico omeomorfismo $\varphi: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$. Una isometria φ è determinata dalla sua traccia $\varphi|_{\partial\mathbb{H}^n}$ al bordo.*

DIMOSTRAZIONE. L'estensione di φ al bordo è definita in modo naturale: un punto al bordo è una classe $[\gamma]$ di semirette geodetiche e nell'estensione poniamo $\varphi([\gamma]) = [\varphi(\gamma)]$. L'estensione è banalmente un omeomorfismo per le riflessioni lungo sottospazi, e quindi lo è per ogni isometria. \square

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia φ una isometria di \mathbb{H}^n . Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) φ ha almeno un punto fisso in \mathbb{H}^n ,
- (2) φ non ha punti fissi in \mathbb{H}^n e ne ha esattamente uno in $\partial\mathbb{H}^n$,
- (3) φ non ha punti fissi in \mathbb{H}^n e ne ha esattamente due in $\partial\mathbb{H}^n$.

DIMOSTRAZIONE. L'estensione $\varphi: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ è una mappa continua. Poiché $\overline{\mathbb{H}^n}$ è omeomorfo al disco chiuso, il teorema di punto fisso di Brouwer garantisce l'esistenza di un punto fisso per φ .

Ci resta solo da mostrare che se non ci sono punti fissi in \mathbb{H}^n allora i punti fissi al bordo sono al massimo due. Supponiamo per assurdo che siano almeno tre P_1, P_2, P_3 . Una isometria che fissa due punti al bordo fissa anche l'unica geodetica che collega i due punti. Quindi φ fissa la geodetica γ che collega P_1 e P_2 . D'altra parte è facile vedere che fra le infinite geodetiche che puntano su P_3 ce n'è una sola η ortogonale a γ . L'isometria fissa P_3 e quindi deve fissare anche η . In particolare fissa il punto di intersezione $\gamma \cap \eta$: assurdo. \square

Le isometrie di tipo (1), (2) e (3) sono dette rispettivamente *ellittiche*, *paraboliche* e *iperboliche*.

3.3. Sottospazi incidenti, paralleli e ultraparalleli. Ogni k -sottospazio $S \subset \mathbb{H}^n$ ha una chiusura topologica $\overline{S} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ nello spazio iperbolico compattificato. Nei due modelli conformi, la traccia al bordo $\partial S = \overline{S} \cap \partial\mathbb{H}^n$ è una $(k-1)$ -sfera (oppure un $(k-1)$ -piano più il punto all'infinito nel modello del semispazio).

La *distanza* $d(A, B)$ fra due sottoinsiemi A, B di uno spazio metrico è definita come

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}.$$

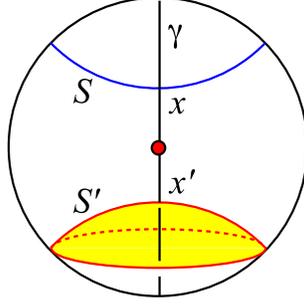


FIGURA 15. I due sottospazi sono porzioni di sfere curvate in modo opposto rispetto all'origine.

PROPOSIZIONE 3.6. *Siano S e S' due sottospazi di \mathbb{H}^n di dimensioni arbitrarie. Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) $S \cap S' \neq \emptyset$,
- (2) $S \cap S' = \emptyset$ e $\overline{S} \cap \overline{S'}$ è un punto in $\partial\mathbb{H}^n$; inoltre $d(S, S') = 0$ e non esiste nessuna geodetica ortogonale a S e S' ,
- (3) $\overline{S} \cap \overline{S'} = \emptyset$; inoltre $d = d(S, S') > 0$ ed esiste un'unica geodetica γ ortogonale a S e S' : il segmento di γ tra S e S' è l'unico arco fra i due sottospazi lungo esattamente d .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo innanzitutto mostrare che i tre casi esauriscono tutte le possibilità, cioè che se $\partial S \cap \partial S'$ contiene almeno due punti allora $S \cap S'$ non è vuoto. Se $\partial S \cap \partial S'$ contiene due punti allora sia S che S' contiene l'intera geodetica che collega questi due punti, e quindi $S \cap S' \neq \emptyset$.

Nel caso (2) i sottospazi S e S' contengono due rette $r \subset S$ e $r' \subset S'$ che puntano verso lo stesso punto all'infinito. Usando il modello del semispazio e ponendo questo punto all'infinito i sottospazi S e S' diventano due sottospazi verticali. Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 3.3 due rette verticali qualsiasi contenute in S e S' si avvicinano definitivamente e quindi $d(S, S') = 0$. Inoltre è chiaro che non esiste nessuna geodetica ortogonale a due sottospazi verticali.

Consideriamo il caso (3). Siano $x_i \in S$ e $x'_i \in S'$ due successioni di punti tali che $d(x_i, x'_i) \rightarrow d$. Poiché $\overline{\mathbb{H}^n}$ è compatto possiamo supporre che entrambe convergano $x_i \rightarrow x$ e $x'_i \rightarrow x'$ a qualche punto $x, x' \in \overline{\mathbb{H}^n}$. Vale $x \in \overline{S}$ e $x' \in \overline{S'}$. Per ipotesi $x \neq x'$ e questo fatto implica che $d > 0$ e $x, x' \in \mathbb{H}^n$: se uno dei due punti limite x, x' fosse all'infinito la distanza $d(x_i, x'_i)$ tenderebbe anch'essa a infinito.

Sia γ la retta geodetica passante per i punti x e x' . Il segmento fra x e x' è lungo $d(x, x') = d$. La retta deve essere ortogonale a S e S' : se formasse con S un angolo in x minore di $\frac{\pi}{2}$ potremmo cambiare localmente la curva intorno a x e trasformarla in una curva (non geodetica) che collega S e S' con lunghezza minore di d .

Infine, mostriamo che γ è l'unica retta ortogonale a S e S' . Usiamo il modello del disco, prendiamo un qualsiasi punto di γ tra x e x' e lo spostiamo sull'origine come in Fig. 15. Le rette ortogonali a γ passanti per x e x' sono archi di circonferenze che si incurvano in direzioni opposte ed è chiaro che non c'è nessuna geodetica che possa essere ortogonale ad entrambe. \square

Due sottospazi di tipo (1), (2) o (3) sono detti rispettivamente *incidenti*, *asintoticamente paralleli* e *ultra-paralleli*.

3.4. Isometrie di \mathbb{H}^2 e \mathbb{H}^3 . Se M è una varietà riemanniana orientabile, indichiamo con $\text{Isom}^+(M)$ il gruppo di isometrie di M che ne preservano l'orientazione. I gruppi $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ possono essere descritti in modo conveniente come opportuni gruppi di matrici 2×2 .

Ricordiamo che la *sfera di Riemann* $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è un oggetto centrale in analisi complessa e in geometria proiettiva. In analisi complessa un *automorfismo* della sfera di Riemann è un *biolomorfismo* di S , cioè una funzione meromorfa su S che induce una corrispondenza biunivoca da S in sé. Teoremi di analisi complessa garantiscono che gli automorfismi di S sono esattamente le *trasformazioni di Möbius*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

dove a, b, c, d sono numeri complessi tali che $ad - bc \neq 0$. Una trasformazione di Möbius è quindi determinata da una matrice invertibile $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e due trasformazioni si compongono come la moltiplicazione fra matrici. Inoltre è facile verificare che due matrici A e B determinano la stessa trasformazione se e solo se $B = \lambda A$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è quindi naturalmente isomorfo a

$$\mathbb{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{PSL}_2(\mathbb{C}) = \text{GL}_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I\} = \text{SL}_2(\mathbb{C}) / \pm I.$$

Generalmente il simbolo \mathbb{P} davanti ad un insieme di matrici (o altri oggetti) indica che si quozienta l'insieme per la relazione $A \sim \lambda A$ per ogni $\lambda \neq 0$. Ricordiamo inoltre che $\text{GL}_n(K)$ è il gruppo moltiplicativo delle matrici $n \times n$ a valori nel campo K e $\text{SL}_n(K)$ è il sottogruppo formato dalle matrici a determinante uno.

In geometria proiettiva la sfera di Riemann è la retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e i suoi automorfismi sono le sue *proiettività*

$$[z, w] \mapsto [az + bw, cz + dw]$$

dove (come sopra) $ad - bc \neq 0$. Anche in questo contesto le proiettività sono esattamente le trasformazioni di Möbius ed il gruppo delle proiettività di \mathbb{CP}^1 è sempre $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$. Ricordiamo che una proiettività di \mathbb{CP}^n è determinata dal suo comportamento su $n + 2$ punti in posizione generale. Per $n = 1$ otteniamo quindi:

PROPOSIZIONE 3.7. *Date due terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ di punti distinti in \mathbb{CP}^1 esiste un'unica trasformazione di Möbius φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i .*

Le trasformazioni di Möbius in cui a, b, c, d sono numeri reali con determinante positivo $ad - bc > 0$ formano un sottogruppo indicato con $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \pm I.$$

È facile vedere che queste sono esattamente le trasformazioni di Möbius che preservano la retta reale estesa $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e che non scambiano le due componenti connesse di $(\mathbb{C} \cup \infty) \setminus (\mathbb{R} \cup \infty)$.

PROPOSIZIONE 3.8. *Date due terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ di punti distinti in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la stessa orientazione ciclica esiste un'unica trasformazione di Möbius $\varphi \in \mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i .*

DIMOSTRAZIONE. Esiste un'unica trasformazione di Möbius $\varphi \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$. Poiché le trasformazioni di Möbius mandano circonferenze di \mathbb{C} (incluse le rette con il punto ∞) in sé, la trasformazione φ preserva l'unica circonferenza $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ passante per i tre punti. Il fatto che i punti abbiano la stessa orientazione ciclica garantisce che φ mantenga l'orientazione di $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e quindi non scambi le due componenti connesse di $(\mathbb{C} \cup \infty) \setminus (\mathbb{R} \cup \infty)$. \square

Identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} e vediamo il piano iperbolico \mathbb{H}^2 come

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

Il gruppo $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agisce quindi sul piano iperbolico \mathbb{H}^2 .

PROPOSIZIONE 3.9. *Con il modello del semipiano* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ è generato dalle seguenti trasformazioni:

- (1) le traslazioni $z \mapsto z + b$ con $b \in \mathbb{R}$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- (2) le omotetie $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$,
- (3) l'inversione $z \mapsto -\frac{1}{z}$ corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mostriamo che queste trasformazioni generano $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sia $\varphi \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. I tre punti $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)$ sono tre punti di $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ coorientati con la terna $0, 1, \infty$. Se $\varphi(\infty) \neq \infty$, con una traslazione si può spostare $\varphi(\infty)$ in 0 e quindi con una inversione in ∞ . Con una traslazione successiva si può spostare $\varphi(0)$ in 0 tenendo fisso ∞ . Infine, con una omotetia teniamo fissi 0 e ∞ e spostiamo $\varphi(1)$ in 1 . L'unica trasformazione che fissa i tre punti $0, 1$ e ∞ è l'identità e quindi siamo a posto.

D'altra parte traslazioni, omotetie e l'inversione sono chiaramente isometrie di \mathbb{H}^2 (l'inversione è una inversione rispetto alla circonferenza $|z| = 1$). Quindi $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

Infine, anche una isometria $\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ è determinata dall'immagine di 3 punti nel bordo $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^2$. Supponiamo infatti che φ fissi 3 punti P, Q, R del bordo. Allora preserva la geodetica γ che unisce P e Q . Abbiamo già visto che preserva anche l'unica geodetica η uscente da R ortogonale a γ , e quindi il punto $\eta \cap \gamma$. La restrizione di φ alla retta γ è una isometria che preserva l'orientazione e fissa un punto $\gamma \cap \eta$; quindi φ fissa tutti i punti della retta γ . Analogamente fissa tutti i punti della retta η . Quindi il differenziale $d_{\gamma \cap \eta} \varphi$ è l'identità, e segue che φ è globalmente l'identità per il Teorema 1.28. \square

Le isometrie che preservano l'orientazione di \mathbb{H}^3 sono descritte invece dall'intero gruppo delle trasformazioni di Möbius nel modo seguente. Identifichiamo

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Identifichiamo anche il piano ad altezza $t = 0$ con \mathbb{C} . Ogni isometria di \mathbb{H}^3 si estende al bordo

$$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

La proposizione seguente dice che la traccia al bordo di ogni isometria è un elemento di $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ e che la traccia induce una bigezione fra $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ e $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

PROPOSIZIONE 3.10. *Con il modello del semispazio* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è simile a quella precedente. In modo analogo si dimostra che $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ è generato dalle seguenti trasformazioni:

- (1) le traslazioni $z \mapsto z + b$ con $b \in \mathbb{C}$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- (2) le omotetie $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$, corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$,
- (3) l'inversione $z \mapsto -\frac{1}{z}$ corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ciascuna di queste trasformazioni è la traccia di una isometria di \mathbb{H}^3 :

- (1) le traslazioni orizzontali $(z, t) \mapsto (z + b, t)$,
- (2) Se $\lambda = \rho e^{i\theta}$, la composizione di una omotetia $(z, t) \mapsto \rho(z, t)$ e di una rotazione $(z, t) \mapsto (e^{i\theta}z, t)$,
- (3) l'inversione rispetto alla sfera $|z|^2 + t^2 = 1$.

Infine, si mostra come sopra che ogni isometria è un elemento di $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$, perché una isometria di \mathbb{H}^3 che fissa tre punti al bordo P, Q, R e preserva l'orientazione di \mathbb{H}^3 è l'identità. Come sopra mostriamo infatti che l'isometria deve fissare puntualmente due geodetiche γ e η ; il differenziale in $\gamma \cap \eta$ è quindi l'identità se ristretto al piano π tangente a γ e η . Sulla retta ortogonale al piano π il differenziale può essere solo $+1$ o -1 , ed è $+1$ perché preserva l'orientazione. Quindi il differenziale è l'identità su tutto lo spazio tangente $T_{\gamma \cap \eta}$ e concludiamo come sopra. \square

3.5. Orosfere. Mostriamo fra poco un modo agevole con cui descrivere ogni isometria ellittica, parabolica o iperbolica. Per studiare le isometrie paraboliche è opportuno introdurre la nozione di *orosfera*.

DEFINIZIONE 3.11. Sia p un punto di $\partial\mathbb{H}^n$. Una *orosfera* centrata in p è una ipersuperficie connessa ortogonale a tutte le rette geodetiche uscenti da p .

Le orosfere possono essere visualizzate in modo semplice usando il modello del semispazio e ponendo p all'infinito. Le rette geodetiche uscenti da p sono tutte e sole le rette verticali e le orosfere centrate in p sono quindi tutti e soli gli iperpiani orizzontali $\{x_n = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

OSSERVAZIONE 3.12. Poiché il tensore metrico $g = \frac{1}{x_n^2} g^E$ è costante su ogni iperpiano orizzontale, ogni orosfera è *isometrica* a \mathbb{R}^n e quindi *piatta* (cioè con curvatura sezionale nulla). Questo fatto è abbastanza sorprendente e peculiare della geometria iperbolica: lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n contiene ipersuperfici isometriche a \mathbb{H}^{n-1} (gli iperpiani), \mathbb{R}^{n-1} (le orosfere) e S^{n-1} (le sfere).

Le orosfere centrate in un punto $p \neq \infty$ di $\partial\mathbb{H}^n$ o in un punto qualsiasi p di ∂D^n nel modello del disco sono tutte e sole le ipersfere tangenti al punto. Le orosfere in \mathbb{H}^2 sono circonferenze e vengono quindi chiamate *orocicli*; un orociclo è mostrato in Fig. 16.

Torniamo alle isometrie di \mathbb{H}^n . Nel modello del semispazio indichiamo un punto come coppia (x, t) dove $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $t = x_{n+1}$.

PROPOSIZIONE 3.13. *Sia φ una isometria di \mathbb{H}^n :*

- (1) *se φ è ellittica con punto fisso nell'origine di D^n allora*

$$\varphi(x) = Ax$$

per una matrice $A \in O(n)$;

- (2) *se φ è parabolica con punto fisso ∞ nel semispazio H^n allora*

$$\varphi(x, t) = (Ax + b, t)$$

per una matrice $A \in O(n)$ ed un vettore b ;

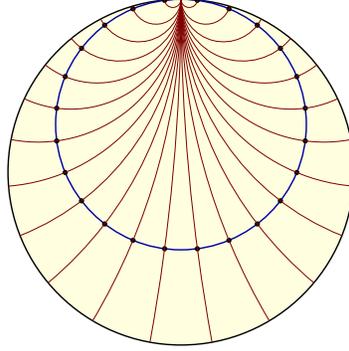


FIGURA 16. Una orosfera in \mathbb{H}^2 centrata in $p \in \partial\mathbb{H}^2$ è una circonferenza tangente a p . L'orosfera è per definizione ortogonale a tutte le (infinite) geodetiche uscenti da p .

(3) se φ è iperbolica con punti fissi 0 e ∞ allora

$$\varphi(x, t) = \lambda(Ax, t)$$

per una matrice $A \in O(n)$ ed uno scalare $\lambda \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. In (1) la mappa $x \mapsto Ax$ è una isometria perché il tensore metrico ha simmetria sferica. Variando $A \in O(n)$ si ottengono tutte le possibili isometrie dello spazio tangente in 0 , e quindi tutte le possibili isometrie di \mathbb{H}^n che fissano 0 per il Teorema 1.28.

Per (2) dimostriamo innanzitutto che φ preserva ciascuna orosfera centrata in ∞ . L'immagine dell'orosfera O_0 ad altezza $t = t_0$ è necessariamente un'orosfera O_1 ad una qualche altezza $t = t_1$. Supponiamo per assurdo che $t_1 \neq t_0$: a meno di cambiare φ con la sua inversa possiamo supporre $t_1 < t_0$. La restrizione

$$\varphi|_{O_0}: O_0 \rightarrow O_1$$

è una isometria. Poiché le metriche di O_0 e O_1 sono rispettivamente $\frac{1}{t_0^2}$ e $\frac{1}{t_1^2}$ volte quella euclidea, letta con la metrica euclidea la restrizione $\varphi|_{O_0}$ è una contrazione. Possiamo identificare O_0 e O_1 facendo coincidere (x, t_0) con (x, t_1) e usare il Teorema delle contrazioni per concludere che esiste un $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\varphi(x, t_0) = \varphi(x, t_1)$. La geodetica verticale passante per questi due punti è quindi preservata, e quindi è preservato anche l'altro suo punto all'infinito $(x, 0)$: assurdo perché φ è parabolica (e non iperbolica).

Sappiamo che φ preserva ogni orosfera O centrata in ∞ . Poiché φ preserva le geodetiche verticali, agisce su ogni orosfera allo stesso modo. Deve preservare la metrica di O , che è euclidea. Quindi è del tipo $x \mapsto Ax + b$.

Infine, in (3) notiamo come in (1) che le isometrie del tipo $\lambda(Ax, t)$ sono trasformazioni aventi 0 e ∞ come punto fisso, e che variando A e λ si ottengono tutte le possibilità. Infatti tali trasformazioni preservano la geodetica che unisce 0 e ∞ e quindi mandano il punto $(0, 1)$ in un punto $(0, \lambda)$. Il differenziale di φ in $(0, 1)$ è necessariamente del tipo $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ per una matrice $A \in O(n)$, lo stesso differenziale di $x \mapsto \lambda\left(\frac{A}{\lambda}, t\right)$. \square

Lo spostamento minimo $d(\varphi)$ di una isometria φ di \mathbb{H}^n è

$$d(\varphi) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, \varphi(x)).$$

I punti che *realizzano* questo spostamento minimo sono gli x tali che $d(x, \varphi(x)) = d(\varphi)$.

COROLLARIO 3.14. *Valgono i fatti seguenti:*

- (1) *una trasformazione ellittica ha spostamento minimo $d = 0$ realizzato in almeno un punto,*
- (2) *una trasformazione parabolica con punto fisso $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ha spostamento minimo $d = 0$ realizzato in nessun punto e fissa ogni orosfera centrata in p ;*
- (3) *una trasformazione iperbolica con punti fissi $p, q \in \partial\mathbb{H}^n$ ha minima distanza positiva $d > 0$ realizzata in tutti e soli i punti della geodetica con estremi in p e q .*

DIMOSTRAZIONE. In (2) è chiaro che $(x, t) \mapsto (Ax + b, t)$ fissa l'orosfera ad altezza t . Poiché la metrica sull'orosfera ad altezza t è $\frac{1}{t^2}$ volte quella euclidea, se $t \rightarrow \infty$ i punti si spostano sempre meno, e lo spostamento tende a zero.

In (3) valutiamo la mappa $(x, t) \mapsto \lambda(Ax, t)$ e quindi la distanza fra (x, t) e $(\lambda Ax, \lambda t)$. Se $x = 0$ la distanza è $d = \ln \lambda$, se $x \neq 0$ è strettamente maggiore, come si vede facilmente integrando lungo un segmento euclideo che collega i due punti. \square

3.6. Area e curvatura. Possiamo finalmente verificare che \mathbb{H}^n ha curvatura sezionale costante -1 . Che lo spazio iperbolico abbia curvatura costante non dovrebbe sorprendere: questo fatto è conseguenza dell'eccezionale quantità di simmetrie (cioè isometrie) di \mathbb{H}^n . Per calcolare la curvatura dobbiamo stimare la differenza fra l'area di un disco iperbolico e di un disco euclideo aventi lo stesso raggio r .

PROPOSIZIONE 3.15. *Il disco di raggio r in \mathbb{H}^2 ha area*

$$A(r) = \pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right)^2 = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} = 2\pi(\cosh r - 1).$$

DIMOSTRAZIONE. In generale, sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto dotato di un arbitrario tensore metrico g , che possiamo interpretare come una matrice quadrata g_x dipendente da $x \in U$. Ricordiamo che g induce una forma di volume in U , ed il volume di un dominio $D \subset U$ è

$$\text{Vol}(D) = \int_D \sqrt{\det g} \cdot dx_1 \cdots dx_n.$$

Sia quindi $D(r)$ il disco in \mathbb{H}^2 di centro 0 e di raggio iperbolico r . Il raggio euclideo è quindi $\tanh \frac{r}{2}$ per il Corollario 2.29. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} A(r) &= \text{Vol}(D(r)) = \int_{D(r)} \sqrt{g} \cdot dx dy = \int_{D(r)} \left(\frac{2}{1-x^2-y^2} \right)^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\tanh \frac{r}{2}} \left(\frac{2}{1-\rho^2} \right)^2 \rho \cdot d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{2}{1-\rho^2} \right]_0^{\tanh \frac{r}{2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{1-\tanh^2 \frac{r}{2}} - 1 \right) = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

□

COROLLARIO 3.16. *Lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n ha curvatura sezionale costante -1 .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in \mathbb{H}^n$ un punto e $W \subset T_p$ un piano vettoriale. L'immagine $\exp_p(W)$ tramite mappa esponenziale è il piano iperbolico passante per p tangente a W , isometrico a \mathbb{H}^2 . Il disco di raggio r ha area

$$A(r) = 2\pi(\cosh r - 1) = 2\pi \left(\frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + o(r^4) \right) = \pi r^2 + \frac{\pi r^4}{12} + o(r^4)$$

e quindi $K = -1$ secondo la Definizione 1.22.

□

Varietà iperboliche

1. Gruppi di isometrie

1.1. Varietà iperboliche, piatte e ellittiche. Una varietà iperbolica, piatta o ellittica è una varietà riemanniana modellata localmente su aperti di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n .

DEFINIZIONE 1.1. Una *varietà iperbolica* (rispettivamente *piatta* o *ellittica*) è una n -varietà riemanniana in cui ogni punto ha un intorno aperto isometrico ad un aperto di \mathbb{H}^n (risp. \mathbb{R}^n o S^n).

OSSERVAZIONE 1.2. Una varietà iperbolica (risp. piatta o ellittica) ha curvatura sezionale costante -1 (risp. 0 o $+1$). È possibile dimostrare l'opposto, cioè che una varietà riemanniana con curvatura costante -1 (risp. 0 o $+1$) è necessariamente iperbolica (risp. piatta o ellittica).

Lo scopo principale di questa sezione sarà dimostrare il Teorema 1.18, secondo cui ogni varietà iperbolica (piatta o ellittica) è ottenuta da \mathbb{H}^n (\mathbb{R}^n o S^n) come quoziente di un opportuno gruppo di isometrie. Per introdurre l'argomento richiamiamo innanzitutto alcuni fatti di topologia generale.

1.2. Azioni di un gruppo e rivestimenti. Ricordiamo brevemente in questa sezione alcune nozioni di topologia generale.

DEFINIZIONE 1.3. Una *azione* di un gruppo G su uno spazio topologico X è un omomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{Omeo}(X)$ a valori nel gruppo $\text{Omeo}(X)$ degli omeomorfismi da X in sé.

Nei casi che studieremo G sarà semplicemente un sottogruppo di $\text{Omeo}(X)$. In generale, si indica comunque con $g(x)$ l'elemento $\rho(g)(x)$ per ogni $g \in G$ e $x \in X$. Ricordiamo che l'*orbita* di un punto $x \in X$ è l'insieme

$$\{g(x) \mid g \in G\} \subset X$$

mentre lo *stabilizzatore* di $x \in X$ è il sottogruppo

$$\{g \mid g(x) = x\} < G.$$

Le orbite definiscono una partizione dello spazio X : due punti $x, y \in X$ stanno nella stessa orbita se e solo se $y = g(x)$ per qualche $g \in G$. Lo spazio topologico quoziente X/G è ottenuto identificando i punti che stanno nella stessa orbita. Diamo due definizioni importanti.

DEFINIZIONE 1.4. L'azione di G è *libera* se ogni $g \in G$ diversa da e non ha punti fissi, cioè $g(x) \neq x$ per ogni $x \in X$.

L'azione è *propriamente discontinua* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono due intorni aperti $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ tali che $g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$ solo per un insieme finito di $g \in G$.

Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X di Hausdorff. Ricordiamo il teorema seguente di topologia.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sono fatti equivalenti:*

- (1) G agisce in modo libero e propriamente discontinuo,
- (2) X/G è di Hausdorff e la proiezione $p: X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Ricordiamo alcuni fatti noti sui rivestimenti. Considereremo implicitamente solo rivestimenti fra spazi sufficientemente regolari (di Hausdorff, connessi, localmente connessi per archi e localmente contrattili).

Un *automorfismo* di un rivestimento $p: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $f: X \rightarrow X$ tale che $p = p \circ f$. Gli automorfismi di un rivestimento formano un gruppo che indichiamo con $\text{Aut}(p)$. Il gruppo $\text{Aut}(p)$ agisce in modo libero e propriamente discontinuo su X . È quindi naturale chiedersi se il rivestimento $p: X \rightarrow Y$ sia il quoziente rispetto a tale azione: vediamo che questo accade solo per una classe specifica di rivestimenti.

Ricordiamo che un rivestimento induce una mappa iniettiva $p_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ a livello di gruppi fondamentali (omettiamo il punto base nella notazione). Il rivestimento è detto *regolare* se l'immagine $p_*(\pi_1(X))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y)$.

PROPOSIZIONE 1.6. *Se $p: X \rightarrow Y$ è un rivestimento regolare allora $Y = X/\text{Aut}(p)$ e vale l'isomorfismo*

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(Y)/p_*(\pi_1(X)).$$

COROLLARIO 1.7. *Se $p: \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento universale allora $X = \tilde{X}/\text{Aut}(p)$ e*

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X)$$

Un rivestimento regolare $p: X \rightarrow Y$ può quindi sempre essere interpretato come l'effetto dell'azione di un gruppo $\text{Aut}(p)$ su X .

1.3. Gruppi di Lie. Gli esempi più importanti di varietà iperboliche, piatte ed ellittiche si ottengono quotizzando lo spazio iperbolico, piatto ed ellittico tramite un opportuno gruppo di isometrie. Ricordiamo la definizione seguente.

DEFINIZIONE 1.8. Un *gruppo di Lie* è un gruppo G munito di una struttura di varietà differenziabile, tale che le operazioni

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (a, b) &\mapsto ab \\ G &\rightarrow G, & a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

siano funzioni lisce.

Un gruppo di Lie di dimensione zero è semplicemente un insieme di punti munito della topologia discreta. Un tale gruppo di Lie è detto *discreto*. Qualsiasi gruppo è in modo naturale un gruppo discreto.

I gruppi di Lie sono oggetti importanti in geometria riemanniana in virtù del fatto seguente, che non dimostriamo. Ricordiamo che una mappa fra spazi topologici è *propria* se la controimmagine di un compatto è sempre compatta.

TEOREMA 1.9 (Myers-Steenrod). *Il gruppo di isometrie $\text{Isom}(M)$ di una varietà riemanniana ha una naturale struttura di gruppo di Lie, che rende la mappa seguente liscia e propria:*

$$\begin{aligned} \text{Isom}(M) \times M &\rightarrow M \times M \\ (\varphi, p) &\mapsto (\varphi(p), p) \end{aligned}$$

Il gruppo di Lie $\text{Isom}(M)$ può avere infinite componenti connesse e può avere dimensione zero. Il teorema di Myers-Steenrod per le varietà che ci interessano può essere dimostrato direttamente: abbiamo già visto che i gruppi di isometrie di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n e S^n sono isomorfi a particolari gruppi di matrici

$$\text{Isom}(\mathbb{H}^n) \cong O_*(n, 1), \quad \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \cong O(n) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{Isom}(S^n) \cong O(n+1)$$

e ciascuno di questi gruppi ha una naturale struttura di gruppo di Lie.¹ Tutti e tre i gruppi hanno due componenti connesse: la componente connessa contenente l'identità è formata dalle isometrie che preservano l'orientazione. Notiamo che $\text{Isom}(S^n)$ è compatto mentre $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ e $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ non lo sono: effettivamente, il teorema di Myers-Steenrod implica immediatamente il fatto seguente.

COROLLARIO 1.10. *Il gruppo di isometrie di una varietà compatta è compatto.*

1.4. Gruppi discreti di isometrie. Se G è un gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M , è facile capire quando G agisce in modo propriamente discontinuo:

PROPOSIZIONE 1.11. *Sia $G < \text{Isom}(M)$ un gruppo di isometrie di una varietà riemanniana M . L'azione di G su M è propriamente discontinua se e solo se G è un sottoinsieme discreto di $\text{Isom}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. È facile mostrare che, essendo M di Hausdorff e localmente compatto, l'azione di G è propriamente discontinua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni compatto $K \subset M$ esistono un numero finito di $g \in G$ tali che $g(K) \cap K \neq \emptyset$.

Per il Teorema di Myers-Steenrod la mappa

$$F: \text{Isom}(M) \times M \rightarrow M \times M, \quad (\varphi, p) \mapsto (\varphi(p), p)$$

è propria. Sia $\pi: \text{Isom}(M) \times M \rightarrow \text{Isom}(M)$ la proiezione sul primo fattore. Notiamo l'uguaglianza

$$\pi(F^{-1}(K \times K)) = \{g \in \text{Isom}(M) \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}.$$

Chiamiamo questo insieme Z . Se $K \subset M$ è compatto allora Z è compatto, perché F è propria. Se G è discreto, interseca il compatto Z in un numero finito di punti, e quindi l'azione è propriamente discontinua.

Se K è un intorno di un punto $x \in M$, l'insieme Z è un intorno dell'identità $e \in \text{Isom}(M)$. Se l'azione è propriamente discontinua $Z \cap G$ è finito. Quindi G ha un intorno di e finito, quindi e è isolato in G (i punti sono chiusi in $\text{Isom}(M)$). La moltiplicazione $x \mapsto gx$ per un elemento di g è un omeomorfismo segue che tutti i punti di G sono isolati, cioè G è discreto. \square

¹Qui \times indica il prodotto semidiretto: come varietà $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è diffeomorfa a $O(n) \times \mathbb{R}^n$, con un prodotto però diverso da quello diretto (ma pur sempre liscio).

Applichiamo questo risultato alla costruzione di rivestimenti fra varietà riemanniane. Per inquadrare bene la situazione, dimostriamo prima un fatto generale, che può essere riassunto dicendo che le strutture differenziabili e riemanniane possono essere “sollevate” lungo i rivestimenti.

PROPOSIZIONE 1.12. *Sia $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ un rivestimento fra spazi topologici. Se M è una varietà differenziabile (o riemanniana), allora \widetilde{M} ha un'unica struttura di varietà differenziabile (o riemanniana) tale che p sia un diffeomorfismo (o isometria) locale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U \subset M$ un aperto banalizzante. Per “banalizzante” intendiamo che la sua controimmagine $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di aperti U_i tali che $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ sia un omeomorfismo per ogni i . A questo punto è sufficiente (e necessario) dare a ciascun U_i la struttura differenziabile o riemanniana di U tramite p . \square

Le strutture (differenziabili o riemanniane) non scendono con altrettanta facilità da \widetilde{M} a M . Consideriamo il caso in cui il rivestimento sia indotto dall'azione di un gruppo.

PROPOSIZIONE 1.13. *Sia G un gruppo che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su una varietà differenziabile (riemanniana) M e $M \rightarrow M/G$ il rivestimento indotto. Esiste una struttura di varietà differenziabile (riemanniana) su M/G che rende la proiezione p un diffeomorfismo (isometria) locale se e solo se G è un gruppo di diffeomorfismi (isometrie) di M . Questa struttura, se esiste, è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M/G$ un punto e $U \ni x$ un intorno banalizzante connesso. Sia U_0 una qualsiasi componente connessa di $p^{-1}(U)$. Abbiamo $p^{-1}(U) = \cup_{g \in G} g(U_0)$. Per ottenere una tale struttura è necessario e sufficiente che gli aperti $g(U_0)$ inducano tramite p la stessa struttura su U . Questo accade precisamente quando ogni g agisce come un diffeomorfismo (isometria). \square

COROLLARIO 1.14. *Sia $G < \text{Isom}(M)$ un gruppo di isometrie. Se G è discreto e agisce in modo libero il quoziente M/G è una varietà riemanniana e $p: M \rightarrow M/G$ un rivestimento ed una isometria locale.*

COROLLARIO 1.15. *Sia $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un gruppo discreto composto solo da isometrie iperboliche e paraboliche. Il quoziente M/G è una varietà iperbolica.*

DIMOSTRAZIONE. Le isometrie iperboliche e paraboliche agiscono in modo libero. Il quoziente è localmente isometrico a \mathbb{H}^n ed è quindi iperbolico. \square

1.5. Mappa sviluppante. D'ora in poi un *rivestimento di varietà riemanniane* sarà sempre implicitamente un rivestimento $p: M \rightarrow N$ fra varietà riemanniane che sia una isometria locale. Notiamo il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 1.16. *Sia $p: M \rightarrow N$ un rivestimento fra varietà riemanniane. Allora M è completa se e solo se N è completa.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema di Hopf-Rinow una varietà riemanniana è completa se e solo se le geodetiche esistono per ogni t . Supponiamo che N sia completa e mostriamo che anche M lo è. Sia γ una geodetica uscente da un punto $x \in M$ con direzione v . La geodetica $p \circ \gamma$ vive in N e quindi esiste per ogni t .

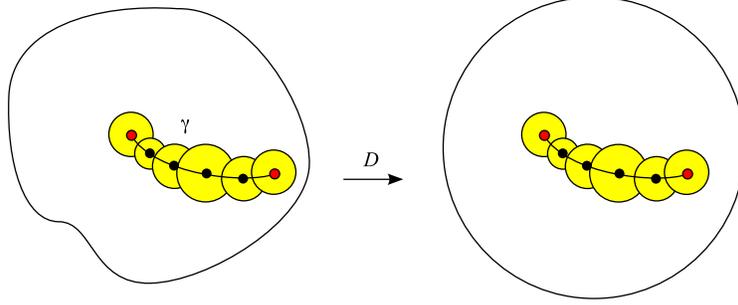


FIGURA 1. La mappa sviluppante.

L'unico sollevamento che coincide inizialmente con γ è una geodetica che esiste per ogni t , ed è proprio γ . Quindi γ esiste per ogni t e M è completa. Si dimostra in modo analogo che M completa implica N completa. \square

Se M è una varietà iperbolica non completa, il suo rivestimento universale \widetilde{M} è una varietà iperbolica semplicemente connessa non completa. Ad esempio, \widetilde{M} potrebbe essere un aperto semplicemente connesso contenuto dentro \mathbb{H}^n . Mostriamo che in generale esiste comunque una mappa naturale da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n .

PROPOSIZIONE 1.17. *Sia \widetilde{M} una varietà iperbolica semplicemente connessa. Esiste una isometria locale*

$$D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$$

detta sviluppante. Due isometrie locali da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n sono ottenute l'una dall'altra tramite post-composizione con una isometria di \mathbb{H}^n . Se \widetilde{M} è completa allora D è una isometria.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto arbitrario $x \in \widetilde{M}$ e lo mandiamo in un punto arbitrario $D(x) \in \mathbb{H}^n$. Poiché \widetilde{M} è iperbolica, in ogni punto $y \in \widetilde{M}$ c'è un intorno U_y (che possiamo supporre essere un disco aperto centrato in y di raggio piccolo) isometrico ad un aperto (sempre un disco) di \mathbb{H}^n . Fissiamo una isometria fra U_x e un disco aperto centrato in $D(x)$.

Mostriamo che la mappa $D: U_x \rightarrow \mathbb{H}^n$ si estende ad un'unica mappa $D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$ che sia una isometria locale. Sia $y \in \widetilde{M}$ un punto arbitrario. Scegliamo un arco γ da x in y . Per compattezza esistono punti $x = x_1, \dots, x_k = y$ su γ tali che i dischi U_{x_1}, \dots, U_{x_k} ricoprono γ . Per ogni $i = 2, \dots, k$ esiste una unica estensione a $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_i}$ della mappa già definita su $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_{i-1}}$ che sia una isometria locale. Estendendo a questo modo definiamo $D(y)$. Si veda Fig. 1.

La definizione non dipende dalle scelte fatte perché \widetilde{M} è semplicemente connessa. Sia γ' un altro arco che collega x a y , da cui ricaviamo un'altra catena di aperti $U_{x'_1}, \dots, U_{x'_h}$. L'arco γ' è omotopo a estremi fissati con γ . È quindi facile vedere che le due catene di aperti sono ottenute l'una dall'altra da mosse elementari quali quella di sostituire due dischi consecutivi U_{x_i} e $U_{x_{i+1}}$ con tre dischi $U_{x_i}, U_{x_{i+\frac{1}{2}}}, U_{x_{i+1}}$ tali che $U_{x_i} \cap U_{x_{i+\frac{1}{2}}} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$. Poiché l'intersezione dei tre è non vuota, è chiaro che l'estensione ai primi due dischi è la stessa di quella ai secondi tre. Quindi D è ben definita.

La mappa D è unica quando è fissata al primo ordine in x . Quindi a meno di isometrie di \mathbb{H}^n è unica per il Corollario 2.7. Infine, supponiamo che \widetilde{M} sia completa. La mappa sviluppante D è una isometria locale. Ricordiamo che un omeomorfismo locale è promosso ad un rivestimento quando tutti i cammini possono essere sollevati, ed è facile vedere che questo accade precisamente quando \widetilde{M} è completa. In alternativa, è anche facile vedere direttamente che la controimmagine di un disco di raggio r centrato in $x \in \mathbb{H}^n$ è l'unione dei dischi di raggio r centrati nei punti in $p^{-1}(x)$. Poiché \mathbb{H}^n è semplicemente connesso, il rivestimento D è in realtà un omeomorfismo e quindi una isometria. \square

Tutta questa sezione può essere riassunta nel risultato seguente.

TEOREMA 1.18. *Una varietà riemanniana completa è iperbolica se e solo se è isometrica a \mathbb{H}^n/G per un gruppo discreto G di isometrie composto solo da trasformazioni paraboliche, iperboliche e l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Se G è discreto e contiene solo parabolici e iperbolici allora \mathbb{H}^n/G è iperbolica per il Corollario 1.15 e completa per la Proposizione 1.16.

D'altra parte, sia M una varietà iperbolica completa. Il suo rivestimento universale \widetilde{M} è una varietà iperbolica per la Proposizione 1.12 e completa per la Proposizione 1.16. Quindi è isometrico a \mathbb{H}^n per la Proposizione 1.17.

Il Corollario 1.7 implica che M è il quoziente di \mathbb{H}^n per l'azione di un gruppo $G = \text{Aut}(p)$ che deve essere un gruppo di isometrie per la Proposizione 1.13, discreto e senza punti fissi per la Proposizione 1.11. \square

OSSERVAZIONE 1.19. In modo analogo si mostra che ogni varietà ellittica o piatta è ottenuta come quoziente di S^n o \mathbb{R}^n per un gruppo discreto G di isometrie senza punti fissi.

1.6. Varietà piatte. Nelle sezioni precedenti abbiamo dimostrato che ogni varietà iperbolica, piatta o ellittica è costruita come quoziente di \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n o S^n per un gruppo discreto Γ di isometrie senza punti fissi. Mostriamo alcuni esempi importanti in questa sezione e le successive.

Una traslazione intera di \mathbb{R}^n è una traslazione $x \mapsto x + b$ di un vettore $b \in \mathbb{Z}^n$. Le traslazioni intere formano un sottogruppo discreto $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ isomorfo a \mathbb{Z}^n . Il quoziente \mathbb{R}^n/Γ è in modo naturale diffeomorfo al toro n -dimensionale:

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$$

che è quindi dotato di una struttura di varietà riemanniana piatta. In dimensione $n = 2$ può essere agevole disegnare un dominio fondamentale per l'azione di Γ . La seguente definizione vale in generale.

DEFINIZIONE 1.20. Un *dominio fondamentale* per l'azione di un gruppo su una varietà M è un chiuso $D \subset M$ che interseca ogni orbita, tale che i punti in $\text{int}(D)$ intersecano ogni orbita in esattamente un punto solo.

In presenza di un dominio fondamentale D , lo spazio quoziente può essere ottenuto semplicemente identificando i punti di ∂D che stanno sulla stessa orbita. Ad esempio un dominio fondamentale per Γ è il quadrato D mostrato in Fig. 2- (sinistra). Identificando i lati opposti si ottiene effettivamente un toro.

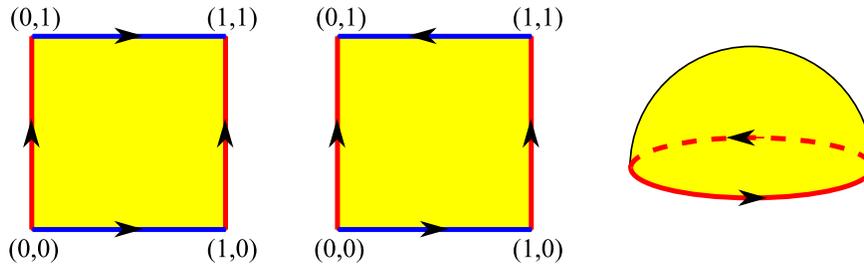


FIGURA 2. Due domini fondamentali in \mathbb{R}^2 per il toro (sinistra) e la bottiglia di Klein (centro): i punti nei lati opposti devono essere identificati come indicato dalle frecce. Un dominio fondamentale in S^2 per il piano proiettivo.

Fra le superfici piatte troviamo anche la *bottiglia di Klein* ottenuta prendendo come Γ il gruppo generato dalle isometrie seguenti:

$$\tau: (x, y) \mapsto (x + 1, y), \quad \eta: (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1).$$

Un dominio fondamentale per la bottiglia di Klein è mostrato in Fig. 2-(centro). I sottogruppi $\langle \tau \rangle$ e $\langle \eta \rangle$ generati rispettivamente da τ e η sono entrambi isomorfi a \mathbb{Z} . Notiamo però che $\mathbb{R}^2/\langle \tau \rangle$ è un cilindro infinito e $\mathbb{R}^2/\langle \eta \rangle$ è un nastro di Möbius infinito. Essendo sottogruppi di Γ entrambi gli spazi rivestono la bottiglia di Klein.

Il sottogruppo di Γ generato dalle traslazioni τ e η^2 è isomorfo a \mathbb{Z}^2 ed ha indice due in Γ . La bottiglia di Klein ha infatti un rivestimento doppio isometrico ad un toro piatto. Il suo dominio fondamentale è un rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$.

1.7. Varietà ellittiche. Ogni varietà ellittica completa è quoziente di S^n , quindi è compatta e ha gruppo fondamentale finito.²

Un esempio importante è lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ che può essere ottenuto quozientando S^n tramite la mappa antipodale $i: v \mapsto -v$. In altre parole otteniamo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ come quoziente del gruppo formato da due elementi $\{e, i\}$. La mappa antipodale è una isometria e quindi $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ eredita una struttura di varietà ellittica. Un dominio fondamentale per $n = 2$ è mostrato in Fig. 2-(destra).

Troviamo altri esempi oltre allo spazio proiettivo in dimensione $n = 3$. Siano p e q due interi coprimi qualsiasi. Sia $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Identifichiamo \mathbb{R}^4 con \mathbb{C}^2 e vediamo S^3 come

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

La mappa

$$f(z, w) = (\omega z, \omega^q w)$$

è una isometria di \mathbb{R}^4 perché effettua contemporaneamente sui due piani ortogonali $w = 0$ e $z = 0$ due rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{p}$ e $\frac{2\pi q}{p}$. La mappa f quindi è una isometria di S^3 . Inoltre ha ordine p e nessuna delle sue potenze f, f^2, \dots, f^{p-1} ha punti fissi. Infine il gruppo $\Gamma = \langle f \rangle$ generato da f è discreto perché è finito.

Il quoziente S^3/Γ è quindi una varietà ellittica avente gruppo fondamentale isomorfo a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$. Tale varietà è detta *spazio lenticolare* ed è normalmente indicata con il simbolo $L(p, q)$.

²Ogni rivestimento fra varietà compatte ha grado finito.



FIGURA 3. La pseudosfera è una superficie isometrica all'unione di due cuspidi troncate. Ogni punto ha curvatura gaussiana -1 .

1.8. Cuspidi. Non è sempre facile descrivere una varietà iperbolica costruendo esplicitamente un gruppo Γ di isometrie di \mathbb{H}^n , spesso si preferisce ricorrere a costruzioni più geometriche del tipo “taglia e incolla”, come vedremo dopo. Descriviamo qui comunque un esempio importante.

Visualizziamo \mathbb{H}^n con il modello del semispazio, usando le coordinate (x, t) con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Sappiamo che ogni isometria $x \mapsto Ax + b$ di \mathbb{R}^{n-1} definisce una isometria $(x, t) \mapsto (Ax + b, t)$ di \mathbb{H}^n .

DEFINIZIONE 1.21. Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$ un gruppo discreto di isometrie senza punti fissi. Il gruppo Γ agisce anche su \mathbb{H}^n ed il quoziente \mathbb{H}^n/Γ è detta *cuspidi*.

Il quoziente $M = \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$ è una varietà piatta di dimensione $n-1$, dotata di un tensore metrico g_M . La cuspidi è quindi isometrica a $M \times \mathbb{R}_{>0}$ con tensore metrico in (x, t) dato da $\frac{g_M \oplus 1}{t^2}$.

OSSERVAZIONE 1.22. È più naturale parametrizzare la seconda coordinata t tramite lunghezza d'arco. Come abbiamo visto nella Proposizione 2.27 del capitolo precedente, una geodetica verticale con velocità unitaria è parametrizzata da $t = e^u$. Quindi usando u invece di t la cuspidi è isometrica a $M \times \mathbb{R}$ con tensore $\frac{g_M}{e^{2u}} \oplus 1$. Muovendosi di livello u a velocità costante otteniamo quindi una contrazione del fattore M di tipo esponenziale.

Se $n = 2$ e Γ è il gruppo di isometrie generato da una traslazione $x \mapsto x + b$ la cuspidi è diffeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$. La circonferenza S^1 al tempo u è lunga e^{-2u} . Una porzione di cuspidi può essere visualizzata come superficie contenuta in \mathbb{R}^3 . Questa superficie è detta *pseudosfera* ed è mostrata in Fig. 3.

Topologicamente la cuspidi è diffeomorfa a \mathbb{H}^2 meno un punto p , però non è isometrica a $\mathbb{H}^2 \setminus \{p\}$: quest'ultima varietà iperbolica infatti non è completa, mentre le cuspidi lo sono per la Proposizione 1.16.

2. Spazio di Teichmüller

2.1. Classificazione delle superfici. Richiamiamo il teorema di classificazione delle superfici.



FIGURA 4. Una sfera con 2 manici può essere rappresentata in vari modi.

TEOREMA 2.1. *Ogni superficie compatta, connessa e orientabile è diffeomorfa alla superficie S_g ottenuta attaccando g manici alla sfera S^2 come indicato in Fig. 4 (sinistra).*

La caratteristica di Eulero di S_g è $\chi(S_g) = 2 - 2g$: le superfici S_g hanno caratteristica di Eulero differente e sono quindi effettivamente non diffeomorfe fra loro. Una superficie riemanniana è ovviamente una superficie dotata di un tensore metrico. Ad esempio, ogni superficie contenuta in \mathbb{R}^3 come le tre superfici mostrate in Fig. 4 ha un tensore metrico indotto da quello euclideo di \mathbb{R}^3 .

Come abbiamo visto nella Sezione 1.9 in ogni punto p di una superficie riemanniana S è definita una curvatura gaussiana $K_p \in \mathbb{R}$. Il famoso teorema di Gauss-Bonnet collega la curvatura alla caratteristica di Eulero di S :

TEOREMA 2.2 (Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie compatta. Vale l'uguaglianza*

$$\int_S K_p = 2\pi\chi(S).$$

Ricordiamo una superficie riemanniana ellittica, euclidea, iperbolica ha curvatura gaussiana costante rispettivamente pari a 1, 0 e -1 . Il teorema di Gauss-Bonnet mostra in particolare che la sfera è l'unica superficie orientabile che può ammettere una metrica ellittica, il toro è l'unica che può ammettere una metrica piatta, e le altre superfici S_g con genere $g \geq 2$ sono le uniche che possono ammettere una metrica iperbolica. Abbiamo già visto che sfera e toro ammettono effettivamente una metrica (rispettivamente) ellittica e piatta. Costruiamo nelle prossime sezioni varie metriche iperboliche tutte le superfici orientabili di genere $g \geq 2$.

Notiamo inoltre una superficie contenuta in \mathbb{R}^3 con curvatura costante deve avere curvatura positiva ed è quindi una sfera. Infatti è facile vedere che una superficie compatta contenuta in \mathbb{R}^3 ha sempre almeno un punto con curvatura positiva. Le metriche a curvatura costante 0 e -1 che costruiremo nelle prossime sezioni non saranno quindi visibili dentro \mathbb{R}^3 .

2.2. Varietà iperboliche con bordo geodetico. Come capita spesso in geometria, esiste una nozione di varietà iperbolica “a bordo” per cui continuano ad essere valide molte (ma non tutte) delle proprietà enunciate fin'ora.

Ricordiamo che una varietà differenziabile M con bordo è uno spazio topologico con carte in un semispazio fissato di \mathbb{R}^n invece che in \mathbb{R}^n . Gli atlanti sono sempre funzioni lisce. I punti corrispondenti al bordo del semispazio formano un sottoinsieme ∂M di M detto appunto *bordo*. Il bordo di una n -varietà è in modo naturale una $(n - 1)$ -varietà senza bordo.

Possiamo definire lo spazio tangente T_x in modo naturale come un semi-spazio vettoriale. Con questa definizione molte nozioni geometriche della geometria riemanniana si estendono facilmente a varietà con bordo. Il bordo di una varietà riemanniana è in modo naturale una varietà riemanniana.

DEFINIZIONE 2.3. Una varietà iperbolica (ellittica, piatta) M a bordo geodetico è una varietà riemanniana con bordo in cui ogni punto ha un aperto isometrico ad un aperto di un semispazio fissato di \mathbb{H}^n (S^n , \mathbb{R}^n).

Il bordo ∂M di M è in modo naturale una varietà iperbolica (ellittica, piatta) senza bordo. La mappa esponenziale ed il raggio di iniettività inj_x di un punto $x \in \partial M$ sono definiti in modo analogo a quanto visto nella Sezione 1.6 del Capitolo 1, tenendo conto che lo spazio tangente T_x è in realtà un semispazio.

Due varietà con bordo geodetico isometrico possono essere incollate e generare così una nuova varietà. Più precisamente, siano M e N due varietà iperboliche (ellittiche, piatte) e $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$ una isometria. Sia $M \cup_\psi N$ lo spazio topologico ottenuto quotizzando l'unione disgiunta $M \sqcup N$ per la relazione di equivalenza che identifica x con $\psi(x)$ per ogni $x \in \partial M$.

PROPOSIZIONE 2.4. *Lo spazio $M \cup_\psi N$ ha una naturale struttura di varietà iperbolica.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su $M \cup_\psi N$ un atlante di aperti a valori in \mathbb{H}^n , tale che le funzioni di transizione siano tutte isometrie. Questo fornisce una struttura di varietà iperbolica.

I punti $M \cup_\psi N$ provenienti da punti interni di M o N sono dotati delle stesse carte in \mathbb{H}^n che avevano in $\text{int}(M)$ e $\text{int}(N)$. Consideriamo ora un punto proveniente da una identificazione $x \sim \psi(x)$ fra due punti $x \in M$ e $\psi(x) \in N$.

Il punto x ha un intorno in M isometrico ad una semi-palla $D \subset \mathbb{H}^n$ di raggio ϵ . Analogamente $\psi(x)$ ha un intorno in N isometrico ad una semi-palla $D' \subset \mathbb{H}^n$ di raggio ϵ . L'isometria $\psi: M \rightarrow N$ definisce una isometria fra le pareti geodetiche delle due palle. Questa isometria si estende in modo unico ad una isometria ψ' di \mathbb{H}^n tale che $\psi'(D) \cup D'$ sia una palla di raggio ϵ . Questa palla fornisce un intorno per x . Abbiamo cosidefinito un atlante ed una metrica iperbolica su $M \cup_\psi N$. \square

Se M è una varietà iperbolica con bordo geodetico, lo è anche il suo rivestimento universale \widetilde{M} , e continua ad essere vero che M è completa se e solo se lo è \widetilde{M} . Inoltre è definita come nella Proposizione 1.17 una sviluppante $D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$; l'unica novità qui è che D generalmente non è suriettiva, anche quando M è completa.

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia \widetilde{M} una varietà iperbolica con bordo geodetico semplicemente connessa. Esiste una isometria locale*

$$D: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^n$$

detta sviluppante. Due isometrie locali da \widetilde{M} in \mathbb{H}^n sono ottenute l'una dall'altra tramite post-composizione con una isometria di \mathbb{H}^n . Se \widetilde{M} è completa allora D è una isometria sull'immagine $D(\widetilde{M})$, che è l'intersezione di alcuni semispazi di \mathbb{H}^n .

DIMOSTRAZIONE. La sviluppante è definita come nella Proposizione 1.17 (si veda la Fig. 1) e risulta sempre essere una isometria locale. Ristretta sull'immagine, la mappa è una isometria locale, e se \widetilde{M} è completa tutti i cammini possono essere

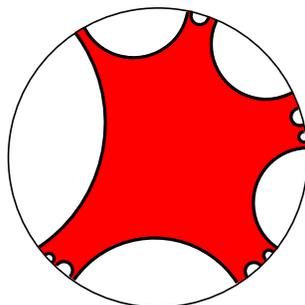


FIGURA 5. Il rivestimento universale di una superficie iperbolica con bordo geodetico è l'intersezione di un numero (generalmente infinito) di semispazi in \mathbb{H}^2 .

sollevati: quindi è un rivestimento $D: \widetilde{M} \rightarrow D(\widetilde{M})$. Poiché \widetilde{M} è completa lo è anche $D(\widetilde{M})$, perché la completezza si mantiene nei rivestimenti.

In particolare l'immagine $D(\widetilde{M})$ è una varietà a bordo geodetico in \mathbb{H}^n chiusa. Poiché è chiusa, il suo bordo è chiuso ed è necessariamente una unione di iperpiani. Quindi $D(\widetilde{M})$ è intersezione di semispazi. In particolare $D(\widetilde{M})$ è un sottoinsieme convesso di \mathbb{H}^n , quindi contrattile, quindi semplicemente connesso. Quindi il rivestimento D è in realtà un diffeomorfismo (e quindi una isometria). \square

Possiamo quindi identificare il rivestimento universale di una varietà iperbolica M con bordo geodetico con una intersezione di semispazi in \mathbb{H}^n come ad esempio in Fig. 5. I sottospazi sono generalmente in numero infinito.

Una superficie iperbolica (ellittica, piatta) compatta a bordo geodetico ha un bordo formato da un numero finito di geodetiche chiuse. Per tali superfici continua a valere il teorema di Gauss-Bonnet:

TEOREMA 2.6 (Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie iperbolica (ellittica, piatta) compatta a bordo geodetico. Vale l'uguaglianza*

$$K \cdot \text{Area}(S) = \int_S K = 2\pi\chi(S)$$

dove $K = -1$ (rispettivamente $K = 1$, $K = 0$) è la curvatura di S .

Ne deduciamo che una superficie iperbolica con bordo geodetico deve avere caratteristica di Eulero negativa.

Se il bordo non è geodetico esiste una formula di Gauss-Bonnet più generale in cui nel termine a sinistra compare un contributo dato dalla curvatura del bordo (che è zero precisamente quando è geodetico).

2.3. Pantaloni iperbolici. Un *pantalone* è una superficie compatta a bordo ottenuta rimuovendo tre piccoli dischi aperti da una sfera. Un pantalone ha caratteristica di Eulero -1 . Dimostriamo in questa sezione il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 2.7. *Dati tre numeri reali positivi $a, b, c > 0$ esiste (a meno di isometrie) un unico pantalone iperbolico con bordo geodetico, le cui curve di bordo abbiano lunghezza a , b e c .*

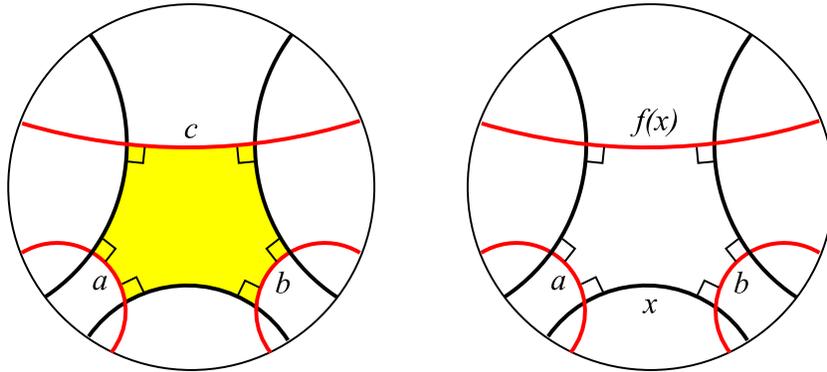


FIGURA 6. Un esagono retto con lati non adiacenti di lunghezza a , b e c (sinistra). L'esagono si costruisce prendendo un segmento lungo x in una retta arbitraria, tracciando due perpendicolari agli estremi lunghe a e b e tracciando due ulteriori perpendicolari. Se x è abbastanza grande le ultime due rette sono ultraparallele e a distanza $f(x)$. Esiste un solo x per cui $c = f(x)$.

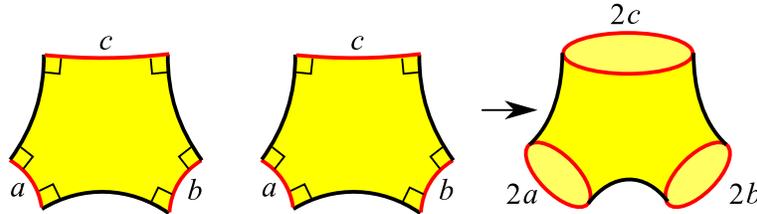


FIGURA 7. Incollando due esagoni lungo i lati neri si ottiene un pantalone iperbolico con bordo geodetico.

Per dimostrare questa proposizione avremo bisogno di studiare alcuni poligoni in \mathbb{H}^2 . Un *poligono* in \mathbb{H}^2 (o \mathbb{R}^2 , S^2) è l'intersezione di un numero finito di semipiani, che sia compatta e con parte interna non vuota. Il bordo di un poligono è unione di un numero finito di segmenti (cioè porzioni compatte di retta) detti *lati*. Due segmenti consecutivi si intersecano in un punto detto *vertice* e definiscono un *angolo interno*. Un poligono è *retto* se gli angoli interni sono tutti retti.

Ad esempio Fig. 6-(sinistra) mostra un esagono retto. La proposizione seguente afferma che le lunghezze a, b, c mostrate in figura determinano tutto l'esagono.

LEMMA 2.8. *Dati tre numeri reali $a, b, c > 0$ esiste (a meno di isometrie) un unico esagono iperbolico retto che ha tre lati non adiacenti di lunghezza a, b e c .*

DIMOSTRAZIONE. Si costruisce l'esagono nel modo seguente. Si prenda come in Fig. 6-(destra) una retta in \mathbb{H}^2 e si fissa un segmento lungo x . Si tracciano due perpendicolari uscenti dai vertici del segmento. Dopo aver percorso due segmenti lunghi a e b si tracciano ancora due perpendicolari.

Se x è sufficientemente grande le due perpendicolari finali sono ultraparallele e quindi esiste un'unica retta perpendicolare ad entrambe. Questa retta chiude l'esagono con un segmento di una certa lunghezza $f(x)$ dipendente solo da x . Si vede facilmente che f è una funzione crescente ed assume tutti i valori reali positivi. Quindi esiste un unico x tale che $f(x) = c$ e la proposizione è dimostrata. \square

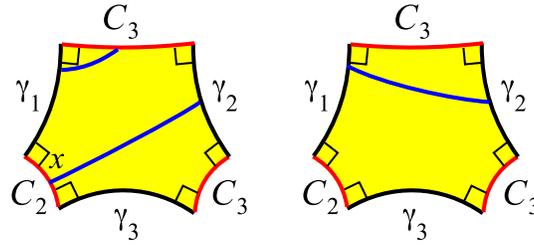


FIGURA 8. Una geodetica.

Incollando due esagoni con lati lunghi a, b, c come mostrato in Fig. 7 si costruiscono pantaloni iperbolici con curve di bordo lunghe $2a, 2b, 2c$. Per mostrare l'unicità di questi pantaloni abbiamo bisogno del fatto seguente.

LEMMA 2.9. *In un pantalone geodetico P , due componenti distinte di ∂P sono collegate da un'unica geodetica ortogonale a ∂P . Le tre geodetiche così ottenute sono disgiunte e dividono il pantalone in due esagoni retti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano C_1, C_2, C_3 le componenti di ∂P e sia γ_i una curva di lunghezza minore fra tutte quelle che collegano C_j e C_k con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. La curva γ_i esiste perché P è compatto, ed è necessariamente una geodetica ortogonale ai bordi.

Le geodetiche γ_1, γ_2 e γ_3 sono disgiunte: supponiamo che γ_1 e γ_2 si intersechino in un punto p . Siano λ_1 e λ_2 le porzioni di γ_1 e γ_2 con estremi in p e C_3 . Possiamo supporre che $L(\lambda_1) \leq L(\lambda_2)$. Modifichiamo allora γ_2 sostituendo il segmento λ_2 con λ_1 : otteniamo una curva che collega C_1 e C_3 avente la stessa lunghezza di γ_2 ma che non è geodetica (perché forma un angolo in p): assurdo.

Le tre geodetiche γ_1, γ_2 e γ_3 suddividono P in esagoni come in Fig. 8. Supponiamo infine per assurdo che esista un'altra geodetica γ'_1 oltre a γ_1 che sia ortogonale al bordo in C_2 e C_3 . Sia $x = \gamma'_1 \cap C_2$. Disegniamo γ'_1 in blu nei due esagoni in Fig. 8. La geodetica γ'_1 esce da x e incontra necessariamente il lato opposto dell'esagono, cioè γ_2 . Se infatti incontrasse γ_1 o γ_3 formerebbe un triangolo con somma degli angoli interni superiore a π , che è impossibile in \mathbb{H}^2 , mentre se incontrasse C_3 formerebbe un quadrilatero retto, che è anch'esso impossibile. Ragionando in questo modo mostriamo che γ'_1 deve intersecare alternativamente γ_2 e γ_1 (passando da un esagono all'altro) finché non incontra C_3 formando anche qui un triangolo con due angoli retti, che è assurdo. \square

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.7. Abbiamo visto che con due esagoni retti si ottengono pantaloni iperbolici con lunghezze $2a, 2b, 2c$ delle geodetiche di bordo arbitrarie. D'altra parte, siano P e P' due pantaloni entrambi con lunghezze $2a, 2b, 2c$ al bordo. Il Lemma 2.9 mostra che P è unione di due esagoni incollati lungo tre geodetiche. I due esagoni hanno tre lati non adiacenti della stessa lunghezza, quindi sono isometrici per il Lemma 2.8, e quindi le lunghezze degli altri tre lati sono a, b e c . Lo stesso vale per P' . Tutti questi esagoni sono isometrici fra loro, e quindi lo sono anche P e P' . \square

2.4. Geodetiche chiuse. Studiamo in questa sezione come si comportano le geodetiche chiuse in una superficie iperbolica (e in una varietà iperbolica di dimensione arbitraria). Una *geodetica chiusa* in una varietà riemanniana M è una mappa liscia $S^1 \rightarrow M$ che sia localmente una geodetica con velocità non nulla.

Se X e Y sono due spazi topologici, il simbolo $[X, Y]$ indica l'insieme delle mappe continue da X in Y , viste a meno di omotopia. Consideriamo qui il caso $X = S^1$ ed enunciamo un teorema di topologia.

PROPOSIZIONE 2.10. *Sia Y uno spazio connesso per archi e y_0 un punto base. La mappa naturale*

$$F: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow [S^1, Y]$$

induce una corrispondenza biunivoca fra classi di coniugio di $\pi_1(Y, y_0)$ e $[S^1, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento di $\pi_1(Y, y_0)$ è rappresentato da un laccio $\alpha: S^1 \rightarrow Y$ con punto base $\alpha(1) = y_0$ ed induce ben definito un elemento di $[S^1, Y]$. La mappa F così definita è suriettiva, perché qualsiasi mappa da S^1 in Y può essere omotopata in modo da passare per y_0 .

Inoltre due lacci α, α' con punto base $\alpha(1) = \alpha'(1) = y_0$ inducono lo stesso elemento in $[S^1, Y]$ se e solo se esiste una omotopia $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$ che si restringa a α e α' quando ristretta in 0 e 1. L'omotopia è libera: la curva $\gamma: t \mapsto H(1, t)$ non è costantemente ferma in y_0 , ma forma un altro laccio che parte e torna in y_0 . L'omotopia H induce facilmente una omotopia a estremi fissati fra α e $\gamma^{-1} \circ \alpha' \circ \gamma$. In altre parole, $F(\alpha) = F(\alpha')$ se e solo se α e α' sono coniugate. \square

Se $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ è una varietà iperbolica completa, gli elementi di $[S^1, M]$ sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio di Γ . Due elementi coniugati di Γ sono dello stesso tipo (banale, parabolica o iperbolica) e hanno lo stesso spostamento minimo. Quindi ogni elemento di $[S^1, M]$ è di un tipo ben definito (banale, parabolico o iperbolico) e ha uno spostamento minimo d (si veda la Sezione 3.5 nel Capitolo 1)

PROPOSIZIONE 2.11. *Un elemento iperbolico di $[S^1, M]$ è rappresentato da un'unica geodetica chiusa, di lunghezza d pari al suo spostamento minimo. Gli elementi banale e parabolici non sono rappresentati da geodetiche chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. Una isometria iperbolica $g \in \Gamma$ ha un'unica geodetica invariante, l'asse, che si proietta su una geodetica chiusa di M di lunghezza d . Due isometrie coniugate determinano la stessa geodetica. Due isometrie non coniugate invece determinano geodetiche non omotope per la Proposizione 2.10.

D'altra parte, se γ è una curva geodetica, fissando un punto base $x_0 \in \mathbb{H}^n$ con $p(x_0) \in \gamma$ la curva γ determina un elemento in $\pi_1(M, p(x_0)) = \Gamma$ cioè una isometria g che preserva γ . Le uniche isometrie che preservano una geodetica sono le iperboliche, e la geodetica è l'asse. \square

Notiamo che una geodetica chiusa non è necessariamente semplice.

PROPOSIZIONE 2.12. *Sia γ una geodetica chiusa in una varietà riemanniana M . Vale uno (ed uno solo) dei fatti seguenti.*

- (1) *la curva γ è semplice,*
- (2) *la curva γ si autointerseca trasversalmente in un numero finito di punti,*
- (3) *la curva γ percorre una curva semplice un numero $k \geq 2$ di volte.*

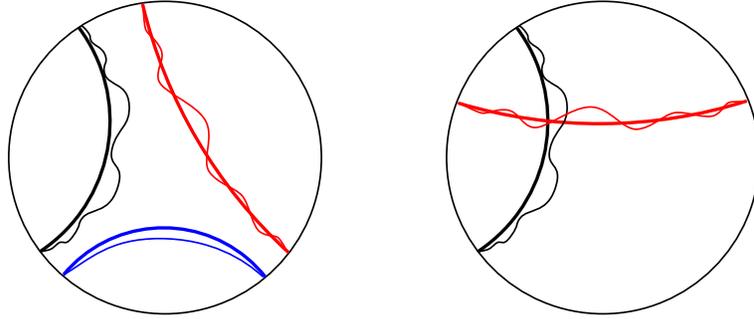


FIGURA 9. Curve e rette hanno distanza uniformemente limitata e tendono quindi agli stessi punti al bordo (sinistra). Se due geodetiche si intersecano allora anche le curve a loro omotope si intersecano (destra).

DIMOSTRAZIONE. Se la curva non è semplice, deve autointersecarsi. Se lo fa con tangenti diverse vale (2). Se lo fa con le stesse tangenti vale (3). \square

Il punto (3) equivale a dire che $\gamma(e^{it}) = \eta(e^{kit})$ per una curva semplice η e $k \geq 3$. In una superficie delle curve semplici chiuse disgiunte non omotope hanno però comunque rappresentanti geodetici semplici e disgiunti. Ricordiamo che una *isotopia ambiente* in una varietà M è una mappa liscia $F: M \times [0, 1] \rightarrow M$ tale che ogni livello $F_t: M \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.13. *Sia S una superficie iperbolica completa. Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ delle curve semplici chiuse di tipo iperbolico, tali che γ_i e γ_j siano disgiunte e non omotope (neppure cambiandone l'orientazione) per ogni $i \neq j$.*

Allora le geodetiche $\gamma'_1, \dots, \gamma'_k$ omotope a queste curve sono anch'esse semplici e disgiunte. C'è inoltre una isotopia ambiente di S che sposta ciascuna γ_i in γ'_i .

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che ogni γ'_i è semplice. La controimmagine di γ'_i nel rivestimento universale \mathbb{H}^2 è necessariamente unione di rette. La controimmagine di γ_i è unione di curve, per ipotesi semplici e disgiunte. L'omotopia fra γ_i e γ'_i si solleva ad una omotopia fra queste curve e queste rette. Poiché l'omotopia ha dominio compatto, esiste $M > 0$ tale che ogni punto in \mathbb{H}^2 viene spostato meno di M . Usando il modello del disco D^n ne deduciamo che i punti vengono spostati sempre meno all'avvicinarsi al bordo (rispetto alla metrica euclidea), e quindi le curve tendono agli stessi punti all'infinito delle rette come in Fig. 9-(sinistra).

Se γ'_i non è semplice, si autointerseca in un numero finito di punti oppure avvolge $k \geq 2$ volte una geodetica semplice η . Nel primo caso, almeno due delle rette in \mathbb{H}^2 si intersecano come in Fig. 9-(destra). Le corrispondenti curve omotope hanno gli stessi punti all'infinito delle rette e quindi si devono intersecare (perché i loro punti all'infinito sono "allacciati"): assurdo.

Nel secondo caso $\gamma'_i = k\eta$. Rappresentiamo una retta controimmagine di γ'_i nel modello del semipiano come retta verticale. Abbiamo $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ e siano $g, g^k \in \Gamma$ le isometrie che lasciano fissa questa retta e la quotientano alle geodetiche η e γ'_i . Sia x un punto arbitrario sulla retta. In Fig. 10-(destra) è mostrato il caso $k = 2$. La curva γ_i interseca la retta ortogonale a x in (almeno) un punto p . Un sollevamento

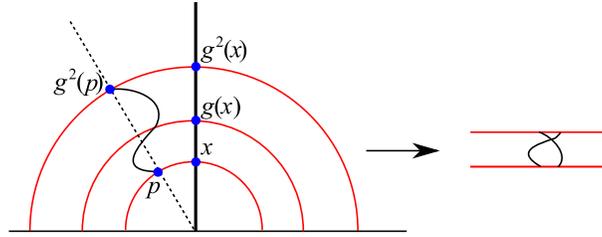


FIGURA 10. Una curva semplice chiusa in una superficie deve essere primitiva nel gruppo fondamentale.

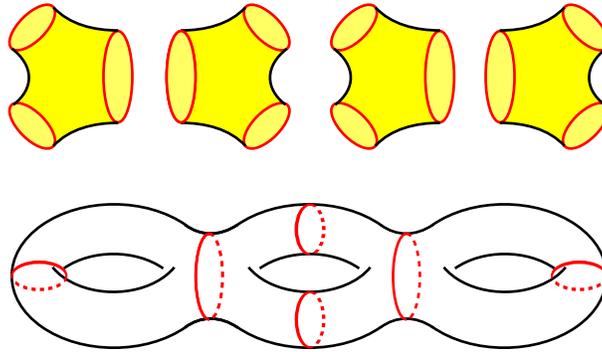


FIGURA 11. Incollando pantaloni si costruiscono tutte le superfici S_g di genere $g \geq 2$. Qui è mostrato un esempio con $g = 3$.

di γ_i parte da p e finisce in $g^2(p)$. Come si vede in figura, quozientando rispetto a g si ottiene necessariamente una curva che si interseca. Quindi γ_i non è semplice, contrariamente alle ipotesi.

Mostriamo infine che $\gamma'_i \cap \gamma'_j = \emptyset$. Il fatto che γ_i non sia omotopa a γ_j neppure dopo un cambio di orientazione esclude che γ'_i e γ'_j abbiano lo stesso supporto. Quindi si intersecano trasversalmente in un numero finito di punti, e la dimostrazione prosegue esattamente come prima: se γ'_i interseca γ'_j allora γ_i interseca γ_j . \square

2.5. Spazio di Teichmüller. In questa sezione studiamo le metriche iperboliche che possono essere assegnate ad una data superficie S_g di genere $g \geq 2$, cioè avente caratteristica di Eulero $\chi(S_g) = 2 - 2g$ negativa.

PROPOSIZIONE 2.14. *La superficie S_g si decompone in $-\chi(S_g) = 2g - 2$ pantaloni.*

DIMOSTRAZIONE. L'esempio mostrato in Fig. 11 per $g = 3$ si generalizza facilmente per ogni g . Una superficie ottenuta incollando k pantaloni ha caratteristica di Eulero $-k$. \square

La decomposizione in pantaloni non è certo unica, a noi comunque basta fissarne una. Le curve semplici chiuse che separano S_g in pantaloni sono $-\frac{3}{2}\chi(S_g) = 3g - 3$. Se assegnamo a ciascuna curva un numero reale positivo, possiamo rappresentare ogni pantalone come l'unico pantalone iperbolico avente lunghezze di bordo proprio

i tre numeri fissati. Pantaloni adiacenti hanno bordi della stessa lunghezza, quindi isometrici, e possono essere incollati. In questo modo si costruisce una metrica iperbolica su S_g .

Nell'incollare due pantaloni adiacenti abbiamo scelto una isometria fra due geodetiche chiuse: le isometrie possibili formano il gruppo di Lie S^1 . In questa costruzione abbiamo quindi due gradi di libertà per ogni curva chiusa: possiamo variare la sua lunghezza e l'isometria scelta. In totale abbiamo quindi $2 \times (3g - 3) = 6g - 6$ gradi di libertà.

Esistono effettivamente $6g - 6$ gradi di libertà nella scelta di una metrica iperbolica. Per chiarire rigorosamente questo fatto introduciamo due definizioni importanti. Indichiamo come sempre con S_g una superficie differenziabile di genere g .

DEFINIZIONE 2.15. Lo spazio dei moduli di S_g è lo spazio delle metriche iperboliche su S_g viste a meno di isometria.

Lo spazio di Teichmüller di S_g è lo spazio delle metriche iperboliche su S_g , viste a meno di isometrie isotope all'identità.

Ricordiamo che una *isotopia* fra due diffeomorfismi di una varietà M è una mappa liscia $M \times [0, 1] \rightarrow M$ che collega i due diffeomorfismi in cui ogni livello t definisce un diffeomorfismo.³

Lo spazio dei moduli è a prima vista l'oggetto più naturale da studiare. Lo spazio di Teichmüller ha però una naturale topologia che lo rende (come vedremo) omeomorfo a \mathbb{R}^{6g-6} , mentre lo spazio dei moduli risulta essere topologicamente più complicato. Si preferisce quindi generalmente studiare innanzitutto lo spazio di Teichmüller, e quindi vedere lo spazio dei moduli come un quoziente di questo.

Sia h una metrica sulla superficie S_g e $\gamma \subset S_g$ una geodetica semplice chiusa. Sia θ un numero reale arbitrario. Come abbiamo accennato sopra, è possibile *torcere* la metrica h di un angolo θ intorno a γ . Informalmente possiamo pensare di far scivolare una delle due componenti adiacenti a γ di un angolo θ in senso antiorario (quale sia la componente che scivola è ininfluente).

Introduciamo questa operazione in modo più formale. Prendiamo un ϵ -intorno di γ , cioè l'insieme dei punti di S_g a distanza minore o uguale di ϵ da γ . Per ϵ sufficientemente piccolo questo intorno ha una naturale struttura prodotto $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ dove $S^1 \times 0$ è γ e $p \times [-\epsilon, \epsilon]$ è un segmento lungo 2ϵ ortogonale a γ nel punto $p \in \gamma$. Si veda Fig. 12-(sinistra).

Adesso scegliamo un diffeomorfismo φ di $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ che incurvi i segmenti come mostrato in Fig. 12-(destra) di un angolo θ . Più precisamente, sia $f: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia che valga zero in $[-\epsilon, -\frac{\epsilon}{2}]$ e θ in $[\frac{\epsilon}{2}, \epsilon]$. Sia φ il diffeomorfismo definito da $\varphi(x, t) = (x + f(t), t)$.

Possiamo definire formalmente una nuova metrica h_θ su S_g nel modo seguente: il tensore metrico h_θ coincide con h in tutti i punti di S_g esterni all'intorno $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$, mentre coincide con $f^{-1}h$ su $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$.

PROPOSIZIONE 2.16. *Il tensore metrico h_θ è ben definito e produce effettivamente una metrica iperbolica che dipende solo da γ e θ a meno di isometrie isotope all'identità.*

³In una omotopia non si chiede che ogni livello t definisca un diffeomorfismo.

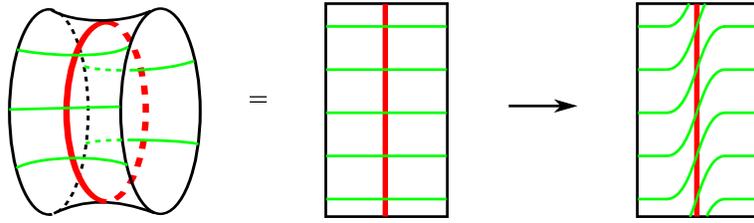


FIGURA 12. L' ϵ -intorno di una geodetica γ , per ϵ sufficientemente piccolo, ha una naturale struttura prodotto $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$. Per definire una torsione lungo γ si definisce una funzione che modifica i segmenti orizzontali come mostrato in figura.

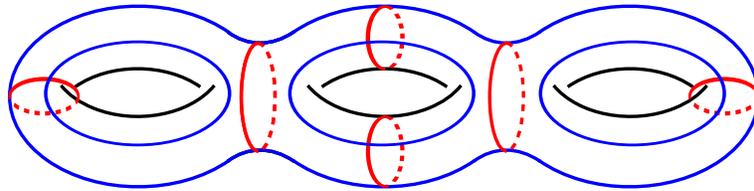


FIGURA 13. Un sistema di riferimento per lo spazio di Teichmüller: 6 curve rosse che dividono S_3 in pantaloni e 4 curve blu che suddividono ulteriormente ogni pantalone in due esagoni.

DIMOSTRAZIONE. C'è solo da notare che su $S^1 \times [\frac{\epsilon}{2}, \epsilon]$ i tensori h e h_θ in realtà coincidono, perché la mappa $(x, t) \mapsto (x, t + \theta)$ è una isometria di $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$. Quindi h_θ si incolla bene ed è ovviamente iperbolica.

Nella definizione di h_θ abbiamo scelto una funzione f in modo arbitrario. Se scegliamo un'altra funzione f' , il diffeomorfismo di S_g che è l'identità fuori da $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon]$ e manda (x, t) in $(x + f(t) - f'(t), t)$ è una isometria fra le due metriche isotopa all'identità. \square

Per fissare una bigezione fra lo spazio di Teichmüller e \mathbb{R}^{6g-6} è necessario fissare un "sistema di riferimento".⁴ Un sistema di riferimento in questo contesto è il dato seguente:

- (1) una decomposizione di S_g in pantaloni, cioè $3g - 3$ curve semplici chiuse disgiunte che decompongano S_g in pantaloni;
- (2) altre curve semplici chiuse disgiunte trasverse alle precedenti, che decompongano i pantaloni in esagoni.

Un esempio è mostrato in Fig. 13.

TEOREMA 2.17. *Un sistema di riferimento per S_g induce una bigezione fra $\text{Teich}(S_g)$ e \mathbb{R}^{6g-6} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia S_g dotata di una metrica (cioè di un tensore metrico) iperbolica h : mostriamo come calcolare $6g - 6$ valori reali a partire da h . Le $3g - 3$ curve in (1) sono a coppie disgiunte e non omotope. Per la Proposizione 2.13 esiste una isotopia ambiente che sposta queste curve in $3g - 3$ geodetiche univocamente

⁴Allo stesso modo, per fissare un isomorfismo fra uno spazio vettoriale reale di dimensione n e \mathbb{R}^n è necessario fissare una base.

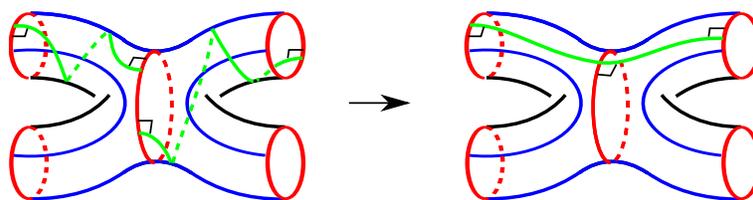


FIGURA 14. Una torsione di un opportuno angolo θ permette di far combaciare le curve verdi minimizzando le intersezioni con le curve blu.

determinate. Le lunghezze di queste geodetiche formano le prime $3g - 3$ coordinate. Le componiamo con un logaritmo naturale per avere valori in tutto \mathbb{R} .

Valutiamo le seconde $3g - 3$ coordinate. Le $3g - 3$ geodetiche dividono S_g in pantaloni iperbolici. Dentro a ciascun pantalone sono definite dal Lemma 2.9 tre geodetiche che dividono il pantalone in due esagoni retti. Sia γ una delle $3g - 3$ geodetiche. In Fig. 14 sono mostrati i due pantaloni geodetici adiacenti (che potrebbero anche coincidere), le tre rette geodetiche (in verde) e quelle invece ottenute dalle curve (2) del nostro sistema di riferimento (in blu). Come mostrato in figura, in ogni pantalone le curve verdi e blu possono essere molto differenti. Le seconde coordinate misurano proprio questa differenza.

Come mostrato in Fig. 14 torcere la metrica di un angolo θ su γ ha come effetto di lasciare le curve blu invarianti, ma far girare quelle verdi di un angolo θ intorno a γ . È quindi facile vedere che esiste un solo angolo di torsione θ che permetta come in figura di far combaciare le due geodetiche verdi in modo da minimizzare le intersezioni con le corrispondenti curve blu. L'angolo di torsione θ per ognuna delle $3g - 3$ fornisce le $3g - 3$ coordinate mancanti.

□