

GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
PRIMO COMPITINO – 26 NOVEMBRE 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 1 (10 punti)

Considera i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$I_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a, y > b\}.$$

- (1) Mostra che $\mathcal{B} = \{I_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è base di una topologia τ su \mathbb{R}^2 meno fine di quella euclidea.
- (2) Lo spazio topologico (\mathbb{R}^2, τ) è connesso? è compatto? è di Hausdorff?
- (3) Mostra che le traslazioni in \mathbb{R}^2 sono omeomorfismi di (\mathbb{R}^2, τ) .
- (4) Determina la chiusura $\overline{\{(x, y)\}}$ di un singolo $\{(x, y)\}$ in (\mathbb{R}^2, τ) .

GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
PRIMO COMPITINO – 26 NOVEMBRE 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 2 (10 punti)

Sia $n \geq 2$. Si consideri la relazione d'equivalenza seguente su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff v = 2^n w \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}.$$

Sia X lo spazio topologico quoziente \mathbb{R}^n / \sim .

- (1) Lo spazio X è compatto? è connesso? è di Hausdorff?
- (2) Mostra che $X \cong S^{n-1} \times S^1$.
- (3) Esiste una immersione di X in \mathbb{R}^{n+1} ?

GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
PRIMO COMPITINO – 26 NOVEMBRE 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 3 (10 punti)

Sia (X, d) uno spazio metrico numerabile che contiene almeno due punti.

- (1) Mostra che se (X, d) è completo allora non è connesso.
- (2) Mostra che (X, d) non è connesso in nessun caso. (Suggerimento: usa la funzione “distanza da un punto fissato”.)