Esercizi di Geometria analitica e algebra lineare
Marzo 2008

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f : V \to V$ un endomorfismo.

1. Mostra che $\ker f^i \subset \ker f^{i+1}$ e $\operatorname{Im} f^i \supset \operatorname{Im} f^{i+1}$ per ogni i.
2. Mostra che se $\operatorname{Im} f^{i_0} = \operatorname{Im} f^{i_0+1}$ per qualche i_0 allora $\operatorname{Im} f^i = \operatorname{Im} f^{i_0}$ per ogni $i \geqslant i_0$.
3. Mostra che se f è nilpotente (cioè esiste k tale che $f^k = 0$) allora $f^n = 0$.

Esercizio 2. Siano V, W spazi vettoriali e $f : V \to W$ una funzione lineare. Sia ${}^t f : W^* \to V^*$ la funzione trasposta di f, definita come ${}^t f(g) = g \circ f$. Mostra che ${}^t({}^t f) : V^{**} \to W^{**}$ è tale che ${}^t({}^t f) = f$, dopo aver identificato V^{**} con V e W^{**} con W tramite l'isomorfismo canonico.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari fra due spazi vettoriali V e W. Dire se vale la relazione seguente:

$$\operatorname{rk}(f+g) \leqslant \operatorname{rk} f + \operatorname{rk} g.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo avente almeno due piani invarianti (esistono cioè due sottospazi p_1, p_2 di dimensione 2 tali che $f(p_i) \subset p_i$ per $i = 1, 2$). Mostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f secondo $\mathcal{B}$ è triangolare.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K. Siano $p_1, \ldots, p_{n-1}$ iperpiani.

1. Mostra che $\dim(p_1 \cap \ldots \cap p_{n-1}) \geqslant 1$.
2. Mostra che se $\dim(p_1 \cap \ldots \cap p_{n-1}) = 1$ allora $\dim(p_{i_1} \cap \ldots \cap p_{i_k}) = n - k$ per ogni $i_1, \ldots, i_k$ distinti.
3. Siano $p_1, \ldots, p_{n-1}$ iperpiani tali che $\dim(p_1 \cap \ldots \cap p_{n-1}) = 1$. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo tale che ogni p_i è f-invariante. Mostra che esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale la matrice associata $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_k \in V$ alcuni vettori. Mostra che
$$\mathrm{Ann}\big(\,\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)\big) = \cap_{i=1}^k \mathrm{Ann}(v_i).$$

Esercizio 7. Siano V e Z spazi vettoriali e $W \subset V$ un sottospazio. Mostra che ogni funzione lineare $f : W \to Z$ è la restrizione di una funzione lineare $g : V \to Z$ (cioè esiste una funzione $g : V \to Z$ tale che $g|_W = f$). Dire quali possibili valori può assumere il rango di g.

Siano $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi e $f_1 : W_1 \to Z$, $f_2 : W_2 \to Z$ applicazioni lineari. Mostra che esiste una $g : V \to Z$ che estende entrambe f_1 e f_2 se e solo se $f_1|_{W_1 \cap W_2} = f_2|_{W_1 \cap W_2}$.

Esercizio 8. Siano V e W spazi vettoriali. Supponiamo $\dim W \geqslant 2$. Sia $w_0 \in W$ diverso da zero. Considera l'insieme
$$S = \{f : V \to W \mid w_0 \notin \mathrm{Im}\, f\}.$$
Mostra che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Spazi affini

Esercizio 1. Sia $f : A \to A'$ una trasformazione affine. Mostrare che $f(\sum_i x_i P_i) = \sum_i x_i f(P_i)$ per ogni combinazione affine.

Esercizio 2. Sia $f : A \to A$ una affinità su uno spazio affine A reale. Sia $L(P, Q)$ il segmento con estremi P e Q. Sia $\mathrm{Conv}(S)$ l'inviluppo convesso di S. Mostra i fatti seguenti:

- $f(L(P, Q)) = L(f(P), f(Q))$,
- Un sottoinsieme $C \subset A$ è convesso se e solo se $f(C)$ è convesso,
- $f(\mathrm{Conv}(S)) = \mathrm{Conv}(f(S))$.

Esercizio 3. Siano $C \subset \mathbb{R}^n$ e $C' \subset \mathbb{R}^m$ sottoinsiemi convessi. Mostra che
$$C \times C' = \{(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in C, x' \in C'\}$$
è convesso in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

Esercizio 4. L'intersezione di un tetraedro con un piano in $\mathbb{R}^3$ è sempre un simplesso (quindi un punto, un segmento, o un triangolo)? L'intersezione di un simplesso n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ con un iperpiano è sempre un simplesso?

Esercizio 5. Sia $\Delta^n \subset A^n$ un simplesso n-dimensionale dentro ad uno spazio affine reale n-dimensionale. Sia $\mathrm{Aff}(\Delta^n)$ l'insieme delle affinità f di A^n tali che $f(\Delta^n) = \Delta^n$.

1. Mostra che $\mathrm{Aff}(\Delta^n)$ è un sottogruppo del gruppo delle affinità di A,
2. Mostra che $\mathrm{Aff}(\Delta^n)$ è isomorfo al gruppo S_{n+1} delle permutazioni di $n+1$ elementi.
3. Mostra che il sottogruppo $\mathrm{Aff}^+(\Delta^n) < \mathrm{Aff}(\Delta^n)$ dato dalle affinità f che preservano l'orientazione di A (cioè tali che la funzione lineare associata ϕ ha determinante $\det \phi > 0$) è isomorfo al gruppo alternante A^n (definito come il sottogruppo di S^n formato dalle permutazioni pari).

Esercizio 6. Siano r_1, r_2, r_3 rette in un piano affine A^2 a coppie non parallele e tali che $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$. Siano r'_1, r'_2, r'_3 rette in A^2 che soddisfano le stesse proprietà. Mostra che esiste una affinità f tale che $f(r_i) = r'_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 7. Siano r, s due rette sghembe in uno spazio affine A^3 di dimensione 3. Siano r', s' altre due rette sghembe. Mostra che esiste una affinità f tale che $f(r) = r'$ e $f(s) = s'$.

Esercizio 8. Siano S e S' due sottospazi affini di uno spazio affine A. Sia T il sottospazio affine più piccolo fra tutti quelli che contengono S e S'. Mostra che $\dim T \leqslant \dim S + \dim S' + 1$. Dire quali delle affermazioni seguenti è vera:

1. Se $\dim T = \dim S + \dim S' + 1$ allora S e S' sono sghembi.
2. Se S e S' sono sghembi allora $\dim T = \dim S + \dim S' + 1$.

Esercizio 9. Date le rette in A^3_K

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = \pi \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y = 13 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Determinare un'equazione cartesiana del piano parallelo ad r e s passante per il punto $Q = (1, 4, 3)$.