Esercizi di Geometria e Algebra lineare
10 dicembre 2007

Esercizio 1. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Sia W un sottospazio f-invariante, cioè tale che $f(W) \subset W$.

1. Se f è un isomorfismo, allora $f|_W : W \to W$ è un isomorfismo?
2. Se $f|_W : W \to W$ è un isomorfismo, allora f è un isomorfismo?

Esercizio 2. Siano

$$U_t = \mathrm{Span}\big\{(1,1,t,0),(0,1,0,1)\big\}, \quad V = \mathrm{Span}\big\{(0,0,1,1),(1,0,1,0)\big\}$$

due sottospazi di $\mathbb{R}^4$, il primo dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

1. Determinare una base per $U_t \cap V$, per ogni t.
2. Costruire una matrice $A \in M(3,4,\mathbb{R})$ tale che $f = L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi le richieste seguenti:
   - $\mathrm{Im}\, f = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x_1 = 0\big\}$,
   - $f|_{U_0 \cap V}$ è iniettiva,
   - $f|_{U_0}$ e $f|_V$ non sono iniettive;
3. Costruire una A come nel punto precedente, tale che $f = L_A$ soddisfi:
   - f sriettiva,
   - $f|_{U_0 \cap V}$ iniettiva,
   - $f|_V$ non iniettiva;

Esercizio 3. Consideriamo i vettori $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Sia

$$\phi : \left(\mathbb{R}^2\right)^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \to M(1,2,\mathbb{R})$$

l'isomorfismo standard. Scrivere $\phi(v_1^*)$ e $\phi(v_2^*)$ e $\phi(\mathrm{Ann}(\{w\}))$ con $w = (1,1)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Siano W_1 e W_2 sottospazi di V, entrambi di dimensione k. Mostrare che esiste un isomorfismo $f : V \to V$ tale che $f(W_1) = W_2$.

Siano inoltre U_1 e U_2 sottospazi di V, entrambi di dimensione h. Mostrare che esiste un isomorfismo $f : V \to V$ tale che $f(W_1) = W_2$ e $f(U_1) = U_2$ se e solo se $\dim(W_1 \cap U_1) = \dim(W_2 \cap U_2)$.

Esercizio 5. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n su un campo K. Mostrare che la matrice associata $M_{\mathcal{B}}(f)$ a f in una base $\mathcal{B}$ non dipende da $\mathcal{B}$ se e solo se $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$ per qualche $\lambda \in K$.

Esercizio 6. Siano p_1, p_2 e p_3 tre piani vettoriali in $\mathbb{R}^4$ (cioè sottospazi vettoriali di dimensione 2), tali che $\dim(p_i \cap p_j) = 1$ per ogni $i \neq j$. Mostrare che esiste una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(V_i) = p_i$, dove V_1, V_2 e V_3 sono i piani coordinati $V_i = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_i = 0\right\}$.

Esercizio 7. Sia $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Sia $M(2, 2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri l'insieme

$$U = \left\{f \in \mathrm{End}(M(2, 2, \mathbb{R})) \;\middle|\; f(A) = f({}^tA)\ \forall A \in M(2, 2, \mathbb{R})\right\}.$$

1. Qual è la dimensione di $\mathrm{End}(M(2, 2, \mathbb{R}))$?
2. Mostrare che U è sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(M(2, 2, \mathbb{R}))$.
3. Calcolare la dimensione di U.