

Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Terzo compito, 28/05/2007

Esercizio 1. Sia B_t la matrice reale dipendente dal parametro reale t data da

$$\begin{pmatrix} 1 + 2t & 4 + 2t & t - 1 \\ -4t - 2 & 1 + 2t & t - 1 \\ t - 1 & t - 1 & 2t + 1 \end{pmatrix}$$

e sia $b_t(x, y) = {}^t x B_t y$ la forma bilineare su \mathbb{R}^3 associata a B_t rispetto alla base standard di \mathbb{R}^3 .

- (i) Si calcolino le matrici delle applicazioni lineari indotte $\delta_{b_t}, \delta'_{b_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^\vee$ (rispetto alla base standard di \mathbb{R}^3 e alla sua base duale).
- (ii) Detta Q_t la forma quadratica associata a b_t , si trovino i valori di t per i quali Q_t è non degenere.
- (iii) Per i $t \in \mathbb{R}$ individuati nel punto precedente, si calcoli la segnatura di Q_t

Esercizio 2. Sia C_t la matrice reale dipendente dal parametro reale t data da

$$\begin{pmatrix} 2 + t^2 & t^2 - 1 & t^2 \\ 3t - 3 & 2 & 4t - 4 \\ t^2 & t^2 - 1 & 2 + t^2 \end{pmatrix}$$

e sia $c_t(x, y) = {}^t x C_t y$ la forma bilineare su \mathbb{R}^3 associata a C_t rispetto alla base standard di \mathbb{R}^3 .

- (i) Trovare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali la forma c_t è un prodotto scalare.
- (ii) Per i valori di t individuati nel punto precedente, costruire una base di \mathbb{R}^3 ortonormale rispetto a c_t
- (iii) Per i valori di t individuati nel primo punto, costruire una famiglia infinita di basi di \mathbb{R}^3 ortonormali rispetto a c_t

Esercizio 3. Su \mathbb{C}^4 si consideri il prodotto Hermitiano standard, indicato con (\cdot, \cdot) . Per $t \in \mathbb{R}$, sia r_t la retta in \mathbb{C}^4 generata dal vettore $v_t = \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2 + \sin(t)e_3 + \cos(t)e_4$. Indichiamo con $H_t \subset A_{\mathbb{C}}^4$ il sottospazio affine di $A_{\mathbb{C}}^4$ che passa per il punto $P = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ e che ha come giacitura il sottospazio dei vettori di \mathbb{C}^4 che sono ortogonali a v_t rispetto al prodotto (\cdot, \cdot)

- (i) Si dimostri che H_t ha dimensione 3
- (ii) Si trovi un riferimento affine per H_t .
- (iii) Detto Q_t il punto di intersezione fra r_t e H_t , si trovi un riferimento affine per il sottospazio affine generato da P, Q_t e dall'origine del riferimento standard su $A_{\mathbb{C}}^4$.