Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Secondo compitino, 18/04/2007

Esercizio 1. Date le quattro rette affini L_1, L_2, M_1, M_2 del piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (con le ultime due dipendenti da parametro), dire quando esiste una affinità $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $f(L_j) = M_j$ per $j = 1, 2$ (giustificando la propria risposta) nei due casi seguenti:
1)

$$L_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} >, \quad L_2 =< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} >$$

$$M_1 =< \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >, \quad M_2 =< \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+2 \\ t \end{pmatrix} >$$

2)

$$L_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} >, \quad L_2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

$$M_1 =< \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >, \quad M_2 =< \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+2 \\ t \end{pmatrix} >$$

3) Nel caso 2) e per $t = 1$ descrivere in modo esplicito una affinità f rispondente ai requisiti, descrivendone la forma $Ax + b$ rispetto al riferimento affine standard.

Esercizio 2. Sia A_t la matrice reale dipendente dal parametro reale t data da

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t+2 \\ -1-t & 0 & t+3 \\ -1-t & -1 & t+4 \end{pmatrix}$$

(i) Trovare lo spettro di A_t al variare del parametro reale t, sapendo che $Sp(A_t)$ contiene il numero 2.
(ii) Calcolare una base per l'autospazio generalizzato associato all'autovalore 2.
(iii) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile

Esercizio 3. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $V = \mathbb{C}[x]_{\leq n}$, e dati $\bar{a} = (a_0, ..., a_n)$ in $\mathbb{C}^{n+1}$, definiamo $L_{\bar{a}} : V \to V$ come $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i$, con $D : V \to V$ operatore di derivazione formale sui polinomi.

(i) Si dimostri che $L_{\bar{a}}$ è invertibile se $a_0 \neq 0$, mentre è nilpotente se $a_0 = 0$.
(ii) Si trovi lo spettro di $L_{\bar{a}}$.
(iii) Calcolare il numero di blocchi di Jordan di una forma canonica di Jordan per $L_{\bar{a}}$.
(iv) Per $n = 5$ e $\bar{a} = (1, 0, 0, 1, 1, 1)$ si determini la forma canonica di Jordan di $L_{\bar{a}}$.