Topologia e Analisi Complessa
Esercizi per le vacanze di Pasqua 2006

Topologia generale, archi, omotopie:

Esercizio 1. Sia X l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ che hanno almeno una coordinata razionale, con la topologia indotta. Mostra che X è connesso per archi.

Esercizio 2. Siano X e Y spazi connessi per archi. Dati due sottoinsiemi propri $A \subsetneq X$ e $B \subsetneq Y$, mostrare che $X \times Y \setminus (A \times B)$ è connesso per archi. Svolgere lo stesso esercizio anche con "connesso" ovunque al posto di "connesso per archi".

Esercizio 3. Sia X lo spazio topologico definito dalla seguente topologia su $\mathbb{Z}$: una base di aperti è formata dal vuoto, $\mathbb{Z}$ e tutti i sottoinsiemi della forma $\{n, n+1\}$ dove $n \in \mathbb{Z}$ è dispari. Mostrare che è effettivamente una base. Determinare le componenti connesse e le componenti connesse per archi di X.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $\{E_j\}_{j\in J}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi per archi di X, tali che

$$\bigcap_{j\in J} E_j \neq \emptyset.$$

Mostra che $\bigcup_{j\in J} E_j$ è connesso per archi.

Il *cono* $C(X)$ di uno spazio topologico X è lo spazio $C(X) = X \times [0,1]/_{X\times\{0\}}$ ottenuto collassando $X \times \{0\}$.

Esercizio 5. Il cono $C(X)$ è connesso per archi.

Esercizio 6. Il cono $C(X)$ è contrattile.

Esercizio 7. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Mostra che U non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Esercizio 8. Sia $f\colon S^2 \to S^2$ data da $f(x,y,z) = (-x,-y,z)$. Mostra che f è omotopa a Id_{S^2}.

Esercizio 9 *(Sottoinsiemi discreti di $\mathbb{C}$).* Diciamo che un punto $x \in S$ è un *punto isolato* di S se esiste un intorno aperto A di x in X tale che $A \cap S = \{x\}$.

Consideriamo un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$.

a. Sia $S \subset U$ un sottoinsieme. Mostrare che S è discreto se e solo se è chiuso in U e la topologia indotta su S è la topologia discreta.

b. Sia $S \subset U$ un sottoinsieme chiuso in U. Mostra che S è discreto in U se e solo se ogni suo punto è isolato.

c. Sia $S \subset U$ un sottoinsieme. Mostra che S è discreto in U se e solo se non ha punti di accumulazione in U.

d. Trova un esempio di S e U tali che S sia discreto in U ma non in $\mathbb{C}$.

e. Sia $S \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme finito. Mostra che S è discreto in ogni aperto che lo contiene.

f. Sia $S \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme discreto. Mostra che S è finito se e solo se S è limitato.

g. Sia $S \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme discreto non limitato. Consideriamo $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mostra che S ha un punto di accumulazione in ∞. Trova un esempio di un tale S.

Gruppo fondamentale:

Esercizio 10 *(Invarianza della dimensione).* Vogliamo dimostrare il seguente fatto: un aperto di $\mathbb{R}^2$ non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Procediamo per passi.

(10.a) Sia $f\colon I \to S^1$ un cammino chiuso tale che

$$f\left(t - \frac{1}{2}\right) = -f(t) \quad \text{per ogni } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Mostra che f è un laccio in $(S^1, f(0))$ e che $[f] \in \pi_1(S^1, f(0))$ corrisponde a un numero dispari in $\mathbb{Z}$; in particolare $[f] \neq [\varepsilon_{f(0)}]$, dove ε_p è il laccio costante nel punto p.

(10.b) Sia $g\colon S^1 \to S^1$ continua e tale che $g(-p) = -g(p)$ per ogni $p \in S^1$. Mostra che g non è omotopa ad una applicazione costante.

(10.c) Mostra che non esiste $h\colon S^2 \to S^1$ continua tale che $h(-p) = -h(p)$ per ogni $p \in S^2$.
(*Suggerimento:* ragiona per assurdo considerando $g\colon D^2 \to S^1$ data da $g(x, y) := h(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.)

(10.d) Sia $k\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Mostra che esiste $p_0 \in S^2$ tale che $k(p_0) = k(-p_0)$; in particolare k non è iniettiva.
(*Suggerimento:* ragiona per assurdo considerando $h(p) := \frac{k(p) - k(-p)}{||k(p) - k(-p)||}$.)

(10.e) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Mostra che U non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

Esercizio 11. Sia X uno spazio topologico e $\alpha, \beta\colon I \to X$ cammini chiusi in X con punti base $x_0 = \alpha(0)$, $y_0 = \beta(0)$. Supponiamo che esista $F\colon I \times I \to X$ continua tale che

$$F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = \beta(t), \quad G(0, s) = G(1, s)$$

per ogni $t, s \in I$. Mostra che esiste un cammino $\gamma\colon I \to X$ da x_0 a y_0 tale che $u_\gamma([\alpha]) = [\beta]$, dove $u_\gamma\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$ è l'isomorfismo associato a γ.

Esercizio 12. Mostra che $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è omeomorfo a $D^3/_\sim$, dove $\sim$ identifica i punti antipodali sul bordo di D^3. Scrivi un cammino chiuso γ in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $[\gamma] \neq [\varepsilon_{\gamma(0)}]$ in $\pi_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \gamma(0))$.

Esercizio 13. Sia X uno spazio topologico connesso per archi tale che $X = A_0 \cup \cdots \cup A_n$, A_i aperto semplicemente connesso di X. Supponiamo anche che $A_i \cap A_j$ sia connesso per archi per ogni i, j e che $A_0 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$. Mostra che X è semplicemente connesso.

Esercizio 14. Mostra che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$, usando l'esercizio precedente.
(*Suggerimento:* se $z_0, \ldots, z_n$ sono coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, considera gli aperti $U_i = \{z_i \neq 0\}$.)

Esercizio 15. Sia C_n la circonferenza in $\mathbb{R}^2$ centrata in $(\frac{1}{n}, 0)$ e di raggio $\frac{1}{n}$. Consideriamo lo spazio topologico

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Mostra che X è connesso per archi, localmente connesso per archi, ma non localmente semplicemente connesso.
Nota: si può dimostrare che non esiste il rivestimento universale di X.

Esercizio 16. Sia k un numero reale e siano

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \;\; H_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = k\}, \;\; X_k = \Gamma \cup H_k.$$

Dividi gli X_k in classi di equivalenza omotopica e calcola i possibili $\pi_1(X_k, x_0)$ al variare di k e di x_0.

Esercizio 17. Calcola il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ meno un punto e di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ meno due punti.

Esercizio 18. Si calcoli $\pi_1(X)$ per i seguenti spazi topologici X:

1. $X = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0\big\}$,
2. $X = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0,\ x^2 + y^2 \geqslant 1\big\}$,
3. $X = \mathbb{R}^n \setminus V$ dove V è un sottospazio di dimensione k, con $0 \leqslant k < n$,
4. $(\star)$ $X = \mathbb{CP}^n \setminus P$ dove P è un sottospazio proiettivo di dimensione k,
5. $(\star)$ $X = \mathbb{C}^2 \setminus (r \cup r')$ dove r e r' sono due rette distinte passanti per l'origine,
6. $X = S^2 \setminus \big\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\big\}$ e $X = S^2 \setminus \big\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big\}$, (è la sfera con due o tre buchi)

7. $(\star)$ $X = S^1 \times S^1 \setminus \{(1,1)\}$ (è il toro con un buco).

8. $X = S(Y) = Y \times [0,1]/_\sim$ con $(y,0) \sim (y',0), (y,1) \sim (y',1)\ \forall\, y, y' \in Y$ è la *sospensione* di uno spazio connesso per archi Y,

Esercizio 19. Sia $X = p_1 \cup p_2$ connesso, unione di due piani in $\mathbb{R}^3$. Mostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 20. Sia $X = p_1 \cup p_2 \cup p_3$ connesso, unione di tre piani p_1, p_2, p_3 in $\mathbb{R}^3$. Mostrare che siamo in uno dei casi seguenti:

- due dei tre piani sono paralleli, e X è semplicemente connesso,
- i 3 piani si intersecano in un punto o in una retta, e X è semplicemente connesso,
- ogni coppia di piani si interseca in una retta, e le tre rette che si ottengono sono tutte parallele: in questo caso $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.

Esercizio 21. Calcolare $\pi_1(X)$ per i seguenti sottoinsiemi X di $\mathbb{R}^3$:

1. $X = S^2 \cup \{x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\}$,
2. $X = D^3 \setminus \{x^2 + y^2 + z^2 < 1/2\}$,
3. $(\star)$ $X = D^3 \setminus \{x^2 + y^2 < 1/2\}$.

Esercizio 22 *(Compito 21/6/05).* Calcolare $\pi_1(X)$ per

$$X = \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1 \text{ oppure } z = 1\big\}.$$

Esercizio 23 *($\sim$ Compito 21/6/05).* Siano X e Y due varietà di Hausdorff e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ due punti. Sia $Z = (X \sqcup Y)/_{(x_0,y_0)}$ ottenuto dall'unione disgiunta di X e Y collassando la coppia di punti x_0 e y_0. Mostrare che

$$\pi_1(Z) = \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

Rivestimenti:

Esercizio 24. Sia $p\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento. Mostra che p è un omeomorfismo se e solo se ha grado 1.

Esercizio 25. Sia T il toro e $p \in T$. Ricordiamo che $\pi_1(T,p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; in particolare il gruppo è abeliano, quindi ogni rivestimento del toro è regolare. Per ogni sottogruppo G di $\pi_1(T,p)$, trova un rivestimento $f\colon \widetilde{T} \to T$ di T tale che $\operatorname{Im} f_* = G$.

Esercizio 26. Sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento. Allora X è varietà topologica se e solo se $\tilde{X}$ lo è.

Esercizio 27 *(Compito 26/9/05).* Siano r e s due rette distinte in $\mathbb{C}^2$ passanti per l'origine. Consideriamo gli spazi topologici $X = \mathbb{C}^2 \setminus r$ e $Y = \mathbb{C}^2 \setminus (r \cup s)$.

- Dire se X e Y sono omeomorfi;
- dire se esistono rivestimenti $X \to Y$ e $Y \to X$.

Esercizio 28 *(Compito 26/9/05).* Uno spazio topologico avente rivestimento universale compatto ha un numero finito di rivestimenti a meno di isomorfismi.

Esercizio 29 *(Compito 13/12/05).* Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con numero finito di fogli. Se X è compatto, allora $\tilde{X}$ è compatto.

Esercizio 30 *(Compito ?/07/05).* Determinare due rivestimenti $f : \tilde{T} \to T$ e $f' : \tilde{T}' \to T$ del toro $T = S^1 \times S^1$ con lo stesso numero di fogli, tali che non esistono omeomorfismi $\phi : \tilde{T} \to \tilde{T}'$ e $\psi : T \to T$ con $f' \circ \phi = \psi \circ f$.

Generale:

Esercizio 31. Mostra che nel gruppo libero F_n di rango n l'unico elemento di periodo finito è l'elemento neutro.

Esercizio 32. Mostrare che non esiste un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(S^1) = S^1$ e $f(0,0) = (2,0)$.