

Algebra – A. A. 2003-2004

Quarto scritto

16 settembre 2004

COGNOME:

NOME:

CORSO (A, B, C, o D):

MATRICOLA:

FIRMA:

VALUTAZIONE

Esercizio 1

Voto:

Esercizio 2

Voto:

Esercizio 3

Voto:

Esercizio 4

Voto:

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo la seguente funzione f_a , dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 5y - z, 2x + 3y, 2x + ay, x - 2y + z)$$

1. Trovare la dimensione di $\text{Ker } f_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. Trovare la dimensione di $\text{Im } f_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

3. Dire per quali parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ è contenuto in $\text{Im } f_a$.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \sqrt{2} & -3 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 (9 punti). Provare che per ogni $0 \leq t \leq 4$ la seguente matrice non è diagonalizzabile.

$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & t \end{bmatrix}$$

Esercizio 4 (9 punti).

Siano

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$V_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + at = 0 \right\}$$

due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 , con V_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la dimensione di W .
2. Trovare le dimensioni di V_a e $W \cap V_a$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

3. Dire per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuto in $V_a \cap W$.